



Transiente effekter i forbindelse med udbredelsen af ulineære højfrekvente bølger i et homogent plasma

Thomsen, K.

Publication date:
1983

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

Citation (APA):
Thomsen, K. (1983). *Transiente effekter i forbindelse med udbredelsen af ulineære højfrekvente bølger i et homogent plasma*. Forsøgsanlæg Risø. Risø-M No. 2370

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

**Transiente effekter i forbindelse
med udbredelsen af ulineære
højfrekvente bølger i et
homogent plasma**

Knud Thomsen

RISØ-M-2370

TRANSIENTE EFFEKTER I FORBINDELSE MED UDBREDELSEN AF ULINEÆRE
HØJFREKVENTE BØLGER I ET HOMOGENT PLASMA

Knud Thomsen

Abstract. I en to-fluidbeskrivelse undersøges de transiente forhold ved udbredelsen af ulineære højfrekvente bølger i et homogent, isotropt eller anisotropt plasma. Efter udledningen af de grundlæggende ligninger for de forskellige bølgetyper, der er indkluderet i undersøgelsen, betragtes først de lineære forhold. Derefter diskuteres betydningen af ulineære fænomener som generering af harmoniske, tæthedsvariationer skabt af ponderomotive kræfter og den deraf resulterende lokale ændring af plasmafrekvensen. Det viser sig, det kun er for udbredelsen af ekstraordinære bølger, at generering af harmoniske er vigtig, og dette undersøges i detaljer. Eventuelle tæthedsvariationer be-

(fortsættes på næste side)

Januar 1983

Forsøgsanlæg Risø, DK 4000 Roskilde, Danmark

skrives enten som drevne ikke-dispersive eller som drevne dispersive lavfrekvente elektrostatiske bølger. Forskellene mellem disse to beskrivelser undersøges først analytisk og derefter numerisk med tæthedsvariationernes indvirkning på udbredelsen af den højfrekvente bølge inkluderet. I alle tilfælde benyttes en endimensionel beskrivelse.

Ansvarlig faglærer: Prof. P.L. Ølgaard
Afdelingen for Elektrofysik,
Danmarks tekniske Højskole.

Medfaglærere: Lic.tech. civ.ing. H.L. Pécseli
Fysikafdelingen
Forsegsanlæg Risø

Dr.phil. civ.ing. V.O. Jensen
Fysikafdelingen
Forsegsanlæg Risø.

UDC 533.951

ISBN 87-550-0902-6
ISSN 0418-6435

Risø Repro 1983

INDHOLD

	Side
1. INDLEDNING	5
2. GRUNDLÆGGENDE LIGNINGER FOR DE FORSKELLIGE BØLGETYPER..	6
2.1. Notation	6
2.2. Elektromagnetiske bølger i homogent plasma	9
2.3. Højfrekvente elektromagnetiske bølger i umagne-	
tiseret plasma	10
2.4. Højfrekvente elektromagnetiske bølger i magne-	
tiseret plasma	11
2.5. Elektrostatisk bølger i homogent plasma	15
2.6. Højfrekvente elektrostatisk bølger i	
umagnetiseret plasma (Langmuir bølger).....	18
2.7. Højfrekvente elektrostatisk bølger i magneti-	
seret plasma	19
2.8. Lavfrekvente elektrostatisk ionakustiske	
bølger	21
2.9. Lavfrekvente elektrostatisk ioncyklotron	
bølger	22
2.10. Lavfrekvente elektrostatisk nedrehydrid	
bølger	24
3. LINEÆRE BØLGERS INDTRÆNGNING OG UDBREDELSE I ET	
HOMOGENT PLASMA	26
3.1. Laplace- og Fouriertransformation	26
3.2. Saddelpunktsintegration	30
3.3. Rækkeudvikling af dispersionrelationen	34
3.4. Selvsimilære løsninger	35
4. DISKUSSION AF VIGTIGE ULINEARITETER I HOMOGENE PLASMAER	38
4.1. Genereringen af harmoniske ved udbredelsen af	
ulineære bølger	38

4.2. Kobling til lavfrekvente bølger via ponderomotive kræfter	42
4.3. Tæthedsperturbationernes indvirkning på udbredelsen af højfrekvente bølger	45
5. 2.HARMONISKE I FORBINDELSE MED UDBREDELSEN AF EKSTRAORDINÆRE BØLGER	47
5.1. Analytisk beskrivelse	47
5.2. Diskussion af den analytiske løsning	55
6. DREVNE LAVFREKVENTE ELEKTROSTATISKE BØLGER	57
6.1. Generel løsning til de inhomogene lavfrekvente bølgeligninger	57
6.2. Indflydelsen af den højfrekvente bølgefronts form og hastighed på tæthedssvaret	59
7. NUMERISK UNDERSØGELSE AF UDBREDELSEN AF HØJFREKVENTE BØLGER	65
7.1. Modelligninger	65
7.2. Løsningsmetode og stabilitet	67
7.3. Numeriske resultater for $v^2 \gg 1$ ($v_g^2 \gg c_g^2$)	69
7.4. Den "ulineære" dispersionsrelation	72
7.5. Diskussion af resultaterne	76
8. KONKLUSION	79
9. REFERENCER	84
APPENDICES	
A. Udledning af ligning (2.48)	86
B. Udledning af ligning (2.62)	90
C. Udledning af ligning (2.72)	92
D. Et blandet rand- og begyndelsesværdiproblem	97
E. Differenstilnærmelse og stabilitetsanalyse	101
F. Supplerende numeriske løsninger af (7.2) og (7.3)	105
G. Numerisk undersøgelse af koblingen til ionakustiske bølger	120

1. INDLEDNING

Der findes efterhånden mange eksempler på anvendelsen af højfrekvente bølger med stor amplitude indenfor plasmafysik. For eksempel anvendes der nu højfrekvente bølger ved opvarmningen af plasmaet i fusionsmaskiner, som tokamakker og stelleratorer. Ved laserfusion beskydes brintpiller med intense laserstråler. Ved studier af de forskellige lag i ionosfæren bestråles disse ved hjælp af antenner, der kan udsende bølger med stor effekt. Blandt andet derfor har det været naturligt at prøve i detaljer at forstå udbredelsen af forskellige højfrekvente bølgetyper i et plasma. Dette problem er som regel på grund af den store amplitude ulineært. Parametrisk henfald, filamentation, selvfokusering og modulationsinstabilitet er eksempler på nogle af de ulineære fænomener, der har betydning i denne sammenhæng (se f.eks. Kaw m.fl. (1973); Manheimer og Ott (1974); Sodha m.fl. (1979)). Det er karakteristisk for de fleste eksisterende teoretiske undersøgelser af disse ulineære forhold, at bølgen allerede er i plasmaet, eller at analysen kun vedrører variationer i den radiale intensitet af en indtrængende plan bølge. Hvorledes forholdene er nær bølgefronten synes at have haft en relativ lille interesse. Der eksisterer dog klassiske behandlinger af det tilsvarende lineære problem (se f.eks. Baerwald (1930); Haskell og Case (1967); Buckley (1975)). Formålet med denne rapport er netop at inkludere vigtige ulineariteter i en teoretisk og numerisk undersøgelse af forholdene omkring udbredelsen af bølgefronten. Vi vil i en endimensional beskrivelse diskutere udbredelsen af følgende højfrekvente bølger: Elektrostatisk elektronplasmabølge (Langmuirbølge) og elektromagnetiske bølger i et isotropt homogent plasma; elektrostatisk øvrehybrid bølge, elektromagnetiske ordinære og ekstraordinære bølger i et anisotropt homogent plasma. Ved behandlingen vil vi se på modifikationer af plasmatætheden, skabt af ponderomotive kræfter nær bølgefronten. Vi vil betragte disse tæthedsvariationer som elek-

trostatiske lavfrekvente bølger, som f.eks. ionakustiske-, ioncyklotron- eller nedrehydrid bølger, og vi vil studere indflydelsen af disse på udbredelsen af de højfrekvente bølger. Endelig vil vi også tage højde for en eventuel generering af 2. harmoniske, medens f.eks. parametriske henfaldsprocesser ikke vil blive behandlet.

Dispositionen for denne rapport er følgende: I kapitel 2 indføres en passende notation, hvorefter der følger en udledning af ligningerne for de forskellige bølgetyper, der betragtes. Forskellige løsningsmetoder, der er anvendelige ved lineare bølger, gennemgås i kapitel 3. En diskussion af de forskellige ulineariteters betydning for hver enkelt bølgetype findes i kapitel 4. I kapitel 5 gennemgås i detaljer genereringen af 2. harmoniske i forbindelse med udbredelse af ekstraordinære bølger. De lavfrekvente ligninger, der beskriver tæthedsvariationer skabt af ponderomotive kræfter, løses analytisk i kapitel 6. Problemet, hvor nu også tæthedsvariationernes indvirkning på den højfrekvente bølge er medtaget, løses numerisk i kapitel 7. Som eksempel betragtes her specielt øvrehybrid bølgers vekselvirkning med ioncyklotron bølger. Endelig følger konklusionen i kapitel 8, derefter referencer samt appendices A-G, hvor enkelte ting er gennemgået i detaljer.

2. GRUNDLÆGGENDE LIGNINGER FOR DE FORSKELLIGE BØLGETYPER

2.1. Notation

Det er bekendt inden den egentlige gennemgang af problemet at få indført en passende notation, samt få indført de ligninger, vi vil benytte ved beskrivelsen af de forskellige bølgetyper, der er aktuelle i denne sammenhæng. For det første vil vi antage, at en to-fluidbeskrivelse er anvendelig, hvilket vil sige, kontinuitetsligningen og impuls-ligningen med eller uden termiske effekter for henholdsvis elektroner og ioner sammen med

Maxwell's ligninger. For det andet, at det kun er elektronerne, der deltager i udbredelsen af de højfrekvente bølger, medens vi antager kvasineutralitet ved de elektrostatiske lavfrekvente bølger. For det tredje, at de hurtige variationer er adiabatisk, medens de langsomme er isoterme for elektronerne. Endelig vil vi begrænse os til et kollisionsfrit tokomponent fuldt ioniseret plasma, bestående af elektroner og enkeltladede ioner. Plasmaet består således af elektroner med ladningen $-e$ og massen m , medens ionerne har ladningen e og massen M . Følgende betegnelser vil bl.a. blive benyttet i det følgende, indeks $j = i, e$ vil angive, om det er for ioner henholdsvis elektroner.

N_j, n_0, \bar{n}_j, n : tætheder

$\vec{V}_j, \vec{v}_j, \vec{v}$: fluidhastigheder

T_j : temperaturer multipliceret med Boltzmanns konstant

V_{Tj} : termiske hastigheder

P_j, \bar{p}_j, p : tryk

λ_{Dj} : debyelængder

ω_{pj} : plasmafrekvenser

C_{pj}, C_{vj} : specifikke varmekapaciteter

γ_j : specifikke varmekapacitetsforhold C_{pj}/C_{vj}

$\vec{G}, \vec{E}, \vec{E}$: elektriske felter

$\vec{B}, \vec{B}_0, \vec{B}$: magnetiske felter

$\phi, \bar{\phi}, \phi$: elektriske potentialer

Ω_j : cyklotronfrekvenser

ρ_j : gyroradier

ϵ_0 : dielektricitetskonstant

μ_0 : vakuumpermeabilitet

Ω, ω : frekvenser

\vec{k}, k : bølgevektor, bølgetal

t : tiden

\vec{r}, x, y, z : stedvektor, rumkoordinater

Plasmaet vil i ligevægtstilstanden være beskrevet ved en homogen tæthed n_0 , pga. ladningsneutralitet er $N_e = N_i = n_0$ overalt i denne tilstand, og har dermed ionplasmafrekvensen $\omega_{pi} = \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 M}$ samt elektronplasmafrekvensen $\omega_{pe} = \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 m}$, som to karakteristiske frekvenser. I de tilfælde, hvor plasmaet er "varmt", dvs. det har en endelig henholdsvis elektron temperatur T_e og iontemperatur T_i , vil der også eksistere to karakteristiske længder, nemlig elektron debyelængden $\lambda_{De} = \sqrt{\epsilon_0 T_e / n_0 e^2}$ og ion debyelængden $\lambda_{Di} = \sqrt{\epsilon_0 T_i / n_0 e^2}$.

Endvidere er elektrontermisk hastighed $V_{Te} = \sqrt{T_e / m}$ og iontermisk hastighed $V_{Ti} = \sqrt{T_i / M}$. For kompletthedens skyld vil vi også her nævne den ionakustiske hastighed $C_s = \sqrt{(\gamma_e T_e + \gamma_i T_i) / M}$ ($= \sqrt{T_e / M}$ for isoterme elektroner med $T_e \gg T_i$) og lyshastigheden $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. I tilfældet, med et konstant og homogent magnetfelt \vec{B}_0 påtrykt plasmaet, er der mulighed for mange forskellige bølgetyper. Her skal vi nævne to karakteristiske frekvenser, elektrongyrofrekvensen $\Omega_e = eB_0 / m$ og iongyrofrekvensen $\Omega_i = eB_0 / M$ (vi vælger at regne Ω_e og Ω_i for positive), og samtidigt skal vi nævne de karakteristiske længder, elektrongyroradius $\rho_e = V_{Te} / \Omega_e$ og iongyroradius $\rho_i = V_{Ti} / \Omega_i$.

I det følgende skal vi bl.a. betragte udbredelsen af en højfrekvent bølge med frekvensen ω_{HF} , og dennes eventuelle kobling til en lavfrekvent bølge med frekvensen ω_{LF} . Ved at kræve $\omega_{HF} \gg \omega_{LF}$ opnår vi, at problemet involverer to tidsskalaer, en hurtig og en langsom tidsskala, beskrevet ved henholdsvis $1/\omega_{HF}$ og $1/\omega_{LF}$. Ved at midle vores ligninger over en tid τ , hvor $1/\omega_{HF} \ll \tau \ll 1/\omega_{LF}$, får vi et ligningssæt til beskrivelse af variationer på den langsomme tidsskala, medens en negligerig af de langsomt varierende led i ligningerne, giver et ligningssæt til beskrivelse af variationer på den hurtige tidsskala. Af samme grund er det hensigtsmæssigt at dele en størrelse A op i tre dele, $A = a_0 + \bar{a} + a$, hvor a er en hurtig varierende del, \bar{a} en langsomt varierende del og a_0 er værdien af A i den uperturberede tilstand. Eller udtrykt formelt:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} a dt = 0 \text{ og } \bar{a} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A dt - a_0$$

2.2. Elektromagnetiske bølger i homogent plasma

De højfrekvente elektromagnetiske bølger, der vil blive diskuteret, er beskrevet ved følgende ligningssystem (ved umagnetiseret plasma sættes $\vec{B}_0 = \vec{0}$).

$$\frac{\partial}{\partial t} n + (n_0 + \bar{n}_e) \nabla \cdot \vec{v} = - \nabla \cdot n \vec{v} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) = - \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B} - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} + \frac{e}{\epsilon_0} n = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \mu_0 e (n_0 + \bar{n}_e) \vec{v} = - \mu_0 e n \vec{v} \quad (2.6)$$

Ligningerne er stillet op således, at venstre side indeholder de lineære led, og højre side de ulineære. Strengt taget er leddene, hvor \bar{n}_e indgår, også ulineære, men mere herom senere (se afsnit 4.3). Disse ligninger beskriver en udbredelse på en hurtig tidsskala (jævnfør det forrige afsnit), hvorfor kun elektronfluidligningerne er medtaget. Desuden betragtes kun bølger med fasehastigheder $V_p = \omega/k \gg V_{Te}$, af hvilken grund led stammende fra en endelig elektron temperatur ikke er medtaget i ligning (2.2). Vi benytter altså en kold plasma beskrivelse i dette tilfælde. Det er ikke meningen her at gennemgå teorien for alle højfrekvente elektromagnetiske bølger i et isotropt, såvel som anisotropt, homogent plasma (se f.eks. Yeh og Liu (1972)), men blot nævne nogle resultater, som vi vil få brug for under den videre gennemgang.

2.3. Højfrekvente elektromagnetiske bølger i umagnetiseret plasma

I det isotrope tilfælde, $\vec{B}_0 = 0$, er det en simpel sag at reducere ligning (2.2), (2.5) og (2.6) til

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{\bar{n}_e}{n_0} \right) \vec{E} \right] &= e \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} n \vec{v} \\ - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 + \frac{\bar{n}_e}{n_0} \right) \vec{v} \times \vec{B} - e \mu_0 (n_0 + \bar{n}_e) \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} & \end{aligned} \quad (2.7)$$

Leddene \bar{n}_e/n_0 er kun aktuelt i det øjeblik, bølgen kobler til lavfrekvente bølger (eller plasmaet er inhomogent). Negligeres de ulineære led, dvs. højre side af (2.7) og $\bar{n}_e/n_0 = 0$, ses det let ved indsættelse af en plan bølge $\vec{E}_0 \exp(-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, at dispersionrelationen er givet ved

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2 \quad (2.8)$$

Det skal bemærkes, at ω_{pe}^2 skulle erstattes af $\omega_{pe}^2(1 + \bar{n}_e/n_0)$, hvis vi ikke havde negligeret \bar{n}_e/n_0 .

2.4. Højfrekvente elektromagnetiske bølger i magnetiseret plasma

I det anisotrope tilfælde, hvor et homogent og konstant magnetfelt \vec{B}_0 er påtrykt plasmaet, er det bekvemt at Laplace- og Fouriertransformere ligningerne (2.1) - (2.6) i henholdsvis tid og rum. Vi vil benytte følgende definition på Laplacetransformationen

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.9)$$

Den inverse er da givet ved

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_C F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

hvor den komplekse integrationsvej C er parallel med den reelle akse i det komplekse ω -plan, og valgt således, at alle $F(\omega)$'s singulariteter ligger under denne. Fouriertransformationen defineres således

$$\vec{F}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (2.11)$$

hvor $d\vec{r} = dx dy dz$. Den inverse er da givet ved

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (2.12)$$

hvor $d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$. Det er nu relativt simpelt at bestemme den relative dielektricitetstensor $||\epsilon||$. Vælger vi \vec{B}_0 til at være parallel med z-aksen, fås (se f. eks. Karpman og Shagalov (1982))

$$||\epsilon|| = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} & i \frac{\Omega_e}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} & 0 \\ -i \frac{\Omega_e}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Tages der hensyn til \bar{n}_e/n_0 , skal ω_{pe}^2 erstattes af $\omega_{pe}^2(1 + \bar{n}_e/n_0)$.

Dispersionstensoren $||D(\omega, \vec{k})||$ defineres ved

$$||D(\omega, \vec{k})|| \cdot \vec{E}(\omega, \vec{k}) = i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{E}(\omega, \vec{k})) - \frac{\omega^2}{c^2} ||\epsilon|| \cdot \vec{E}(\omega, \vec{k}) \quad (2.14)$$

Ved at lade \vec{k} være givet i xz-planen, og lade θ betegne vinklen mellem \vec{B}_0 og \vec{k} (dette medfører ingen indskrænkninger), fås

$$||D|| = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{pmatrix} \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \cos 2\theta & 0 & -\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \sin 2\theta \end{pmatrix} - ||\epsilon|| \quad (2.15)$$

Lader vi \vec{J}_{NL} betegne en ulineær strøm, givet ved (Jovanović m.fl. (1982))

$$\begin{aligned} \vec{J}_{NL}(\omega, \vec{k}) = & \frac{c^2 \epsilon_0}{i\omega} \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e}{\epsilon_0} n(t, \vec{r}) \vec{v}(t, \vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dtd\vec{r} \right. \\ & - \frac{\omega^2}{c^2 \omega_{pe}^2} (||I|| - ||\epsilon||) \cdot \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{ \vec{\phi}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \\ & \left. - \frac{m}{e} (\vec{\phi}(t, \vec{r}) \cdot \nabla \vec{\phi}(t, \vec{r})) \} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dtd\vec{r} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

hvor $||I||$ er enhedstensoren, kan ligningerne (2.1) - (2.6) reduceres til

$$||D(\omega, \vec{k})|| \cdot \vec{E}(\omega, \vec{k}) = \frac{i\omega}{c^2 \epsilon_0} \vec{J}_{NL}(\omega, \vec{k}) \quad (2.17)$$

Den lineære dispersionsfunktion $D(\omega, \vec{k})$ er givet ved

$$D(\omega, \vec{k}) = \det ||D(\omega, \vec{k})|| \quad (2.18)$$

hvilket giver dispersionsrelationen

$$D(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (2.19)$$

Ved parallel udbredelse, $\vec{B}_0 || \vec{k}$ og dermed $\theta = 0$, får vi af (2.19) dispersionsrelationerne for (se Yeh og Liu (1972))

R-bølger:

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\Omega_e}{\omega}} \quad (2.20)$$

L-bølger

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{1 + \frac{\Omega_e}{\omega}} \quad (2.21)$$

Disse bølger er dog blot medtaget her for fuldstændighedens skyld. Ved vinkelret udbredelse, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$ og dermed $\theta = \pi/2$, får vi dispersionsrelationerne for

Ordinære bølger:

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2 \quad (2.22)$$

Extraordinære bølger:

$$k^2 c^2 = (\omega^2(\omega^2 - \omega_{UH}^2) - \omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{pe}^2))/(\omega^2 - \omega_{UH}^2) \quad (2.23)$$

Hvor $\omega_{UH} = (\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2)^{1/2}$ er øvrehybrid frekvensen. På fig. 2 side 41 er løsningen af (2.23) vist for $\omega_{pe}^2 = 9\Omega_e^2$. På denne figur er indført to frekvenser

$$\omega_L^2 = \frac{1}{2} [2\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2 - \Omega_e (4\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2)^{1/2}] \quad (2.24)$$

$$\omega_H^2 = \frac{1}{2} [2\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2 + \Omega_e (4\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2)^{1/2}] \quad (2.25)$$

Der gælder følgende ulighed $\omega_L < \omega_{UH} < \omega_H$.

2.5 Elektrostatisk bølger i homogent plasma

Ved beskrivelsen af de elektrostatisk bølger ($\vec{k} \parallel \vec{E}$) benyttes en varm to-fluidbeskrivelse af plasmaet og Poisson's ligning. Dette er en god tilnærmelse, så længe vi indskrænker os til at betragte bølger og perturbationer, hvis karakteristiske skælængde l er meget større end elektron Debyelængden λ_{De} . Der ved kan Landau-dæmpningen på elektronerne negligeres. Ved endvidere kun at betragte tilfælde, hvor elektrontemperaturen T_e er meget større end iontemperaturen T_i , kan Landau-dæmpningen også negligeres for ionerne.

Ved at benytte den i afsnit 2.1 indførte notation, fås følgende ligningssystem, beskrivende såvel højfrekvente som lavfrekvente elektrostatisk bølger i et magnetiseret plasma (det unmagnetiserede tilfælde fås ved at sætte $\vec{B}_0 = \vec{0}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} N_j + \nabla \cdot N_j \vec{V}_j = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_j + \vec{V}_j \cdot \nabla \vec{V}_j = \frac{q_j}{m_j} [-\nabla \phi + \vec{V}_j \times \vec{B}_0] - \frac{\nabla P_j}{N_j m_j} \quad (2.27)$$

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = - \sum_{j=i,e} q_j N_j \quad (2.28)$$

For at få sluttet ligningssystemet vil vi udelukkende betragte adiabatisk eller isoterme processer, således at

$$\nabla P_j = \gamma_j T_j \nabla N_j \quad (2.29)$$

hvor $\gamma_j = 3$ for adiabatisk, og $\gamma_j = 1$ for isoterme processer. Indeks $j = i$ for ioner, og $j = e$ for elektroner. I det følgende benyttes $M = m_i$, $m = m_e$, $e = q_i$ og $-e = q_e$. I ligningerne (2.26) - (2.29) indsættes nu

$$N_e = n_0 + \bar{n}_e + n$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_e + \vec{v}$$

$$P_e = p_0 + \bar{p}_e + p$$

$$\phi = \bar{\phi} + \phi \quad (2.30)$$

$$N_i = n_0 + \bar{n}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i$$

$$P_i = p_0 + \bar{p}_i$$

Ved i de resulterende ligninger at negligere alle langsomt varierende led, får vi et ligningssystem, der beskriver bølger på en hurtig tidsskala

$$\frac{\partial}{\partial t} n + n_0 \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \bar{n}_e \vec{v} + n \vec{v} \cdot \vec{v}_e + \vec{v} \cdot n \vec{v} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v}_e \cdot \vec{v} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \vec{v}_e + \vec{v} \cdot \vec{v} \vec{v} = \frac{e}{m} \nabla \phi \quad (3.32)$$

$$- \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B}_0 - \frac{3T_e}{N_e m} \nabla n$$

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = en \quad (2.33)$$

Ved udledelsen af disse ligninger er det antaget, at elektronerne er adiabatisk - altså $\gamma_e = 3$, og ionernes masse M er regnet for uendelig stor. Det kan vises, at leddene mærket --- alle er af relativ størrelsesorden $(\lambda_{De}/l)^2$, samt at

$(3T_e/N_{em})\nabla n = (3T_e\nabla n/n_0m)(1+0((\lambda_{De}/l)^2))$ med T_e konstant på højre side af lighedstegnet (Dysthe og Pécseli (1977) og (1978)). Vi vil nu benytte midlingsproceduren beskrevet i afsnit 2.1 på de resulterende ligninger. Det antages, at elektronerne er isoterme, $\gamma_e = 1$. Ved samtidigt at kræve kvasineutralitet, får vi følgende ligningssystem, beskrivende plasmaet på den langsomme tidsskala

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n}_e + n_0 \nabla \cdot \bar{\vec{v}}_e + \nabla \cdot \bar{n}_e \bar{\vec{v}}_e + \nabla \cdot n \bar{\vec{v}} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\vec{v}}_e + \bar{\vec{v}}_e \cdot \nabla \bar{\vec{v}}_e + \nabla \cdot \bar{\vec{v}}_e = \frac{e}{m} \nabla \phi - \frac{e}{m} \bar{\vec{v}}_e \times \vec{B}_0 - \frac{T_e}{N_{em}} \nabla \bar{n}_e \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n}_i + n_0 \nabla \cdot \bar{\vec{v}}_i + \nabla \cdot \bar{n}_i \bar{\vec{v}}_i = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\vec{v}}_i + \bar{\vec{v}}_i \cdot \nabla \bar{\vec{v}}_i = -\frac{e}{M} \nabla \phi + \frac{e}{M} \bar{\vec{v}}_i \times \vec{B}_0 - \gamma_i \frac{T_i}{N_i M} \nabla \bar{n}_i \quad (2.37)$$

$$\bar{n} = \bar{n}_e = \bar{n}_i \quad (2.38)$$

Vi vil på den langsomme tidsskala kun betragte det lineære tæthedssvar på drivledet, som er $\overline{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}$, se afsnit 4.2 om ponderomotive kræfter. Derfor vil leddene mærket --- blive negligeret, samt approksimationerne $T_e \nabla \bar{n}_e / N_{em} = T_e \nabla \bar{n}_e / n_0 m$ og $\gamma_i T_i \nabla \bar{n}_i / N_i M \approx \gamma_i T_i \nabla \bar{n}_i / n_0 M$, med T_e og T_i regnet konstant, blive benyttet i det følgende.

2.6 Højfrekvente elektrostatiske bølger i umagnetiseret plasma (Langmuir bølger)

Sættes $\vec{B}_0 = 0$, og negligeres alle ulineære led af relativ størrelsesorden $(\lambda_{De}/\ell)^2$ i ligningerne (2.31) - (2.33), får vi følgende ligningssystem til beskrivelse af Langmuir bølger (Dysthe og Pécseli (1977))

$$\frac{\partial}{\partial t} n + n_0 \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \bar{n} \vec{v} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \frac{e}{m} \nabla \phi - 3 \frac{v_{Te}^2}{n_0} \nabla n \quad (2.40)$$

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = en \quad (2.41)$$

Disse ligninger kan reduceres til (undervejs negligeres et led $3\omega_{pe}^2 \lambda_{De}^2 \nabla \cdot (\bar{n}/n_0) \nabla \nabla^2 \phi$, som også er af relativ størrelsesorden $(\lambda_{De}/\ell)^2$)

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Te}^2 \nabla^2 + \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{\bar{n}}{n_0} \right) \right) \nabla \phi = 0 \quad (2.42)$$

og den lineære dispersionsrelation er givet ved (for $\bar{n}/n_0 = 0$)

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3v_{Te}^2 k^2 \quad (2.43)$$

Integreres ligning (2.42) mht. \vec{r} (integrationskonstanten sættes lig nul), og indføres $\vec{E} = -\nabla \phi$, kan vi nu på to måder simplificere denne ligning. Først vil vi antage, at \vec{E} kan skrives som

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}}(t, \vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.} \quad (2.44)$$

hvor c.c. betegner den kompleks konjugerede. $\vec{\mathcal{E}}(t, \vec{r})$ er en kompleks amplitude, der varierer langsomt i tid, $|\partial^2 \vec{\mathcal{E}} / \partial t^2| \ll |\omega_0 \partial \vec{\mathcal{E}} / \partial t|$. Indsættes (2.44), fås ved udnyttelse af førnævnte ulighed

$$2i\omega_0 \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial t} + 3v_{Te}^2 \nabla^2 \hat{\mathcal{E}} + (\omega_0^2 - \omega_{pe}^2) \hat{\mathcal{E}} = \omega_{pe}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} \hat{\mathcal{E}} \quad (2.45)$$

Ligning (2.45) er også kendt som den første af Zakharovs's ligninger (Zakharov (1971)), (sidste led på venstre side negligeres ofte fordi $\omega_0^2 = \omega_{pe}^2$). Ved dette problem er det fordelagtigt at udskille både den hurtige rumlige variation og den hurtige tidsvariation. Vi antager altså, at $\hat{\mathcal{E}}$ kan skrives på formen

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}(t, \vec{r}) e^{-i(\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + c.c. \quad (2.46)$$

Hvor $|\vec{k}|^2 = (\omega_0^2 - \omega_{pe}^2)/3v_{Te}^2$, og $\hat{\mathcal{E}}(t, \vec{r})$, der nu er langsomt varierende i både tid og rum, beskriver indhylningen af $\hat{\mathcal{E}}$. Indsættelse af (2.46) i den modificerede udgave af (2.42) giver

$$2i\omega_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \nabla \right) \hat{\mathcal{E}} + 3v_{Te}^2 \nabla^2 \hat{\mathcal{E}} = \omega_{pe}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} \hat{\mathcal{E}} \quad (2.47)$$

Som før er $\partial^2 \hat{\mathcal{E}} / \partial t^2$ negligeret, og vi har indført gruppehastigheden $\vec{v}_g = d\omega/d\vec{k} = (3v_{Te}^2/\omega_0) \vec{k}$, se ligning (2.43). I det følgende vil det herefter blive antaget, at ligningerne (2.45) og (2.47) beskriver amplituden $\hat{\mathcal{E}}$'s variation på samme tidsskala som ligningerne (2.34) - (2.38).

2.7. Højfrekvente elektrostatiske bølger i magnetiseret plasma

Ved i ligning (2.40) at medtage et led $-(e/m)\vec{v} \times \vec{B}_0$ på højre side, og igen negligere ulineære led af relativ størrelsesorden $(\lambda_{De}/l)^2$ (Dysthe m.fl. (1978)), får vi følgende ligning (se appendiks A) til beskrivelse af højfrekvente elektrostatiske bølger i magnetiseret plasma

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Te}^2 \nabla^2 + \omega_{pe}^2 \right) \left(\nabla^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Omega_e^2 \nabla_{||}^2 \phi \right) \\ & + \Omega_e^2 \nabla_{||}^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = - \nabla \cdot \left(\omega_{pe}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$- \nabla_{||} \cdot \left(\omega_{pe}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} \Omega_e^2 \nabla_{||} \phi \right) + \omega_{pe}^2 \frac{e^+}{B_0} \cdot \left(\frac{\bar{n}}{n_0} \right) \times \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Hvis $\hat{B}_0 = B_0 \hat{z}$, er operatorerne $\nabla_{||} = \hat{z} \partial / \partial z$ og $\nabla_{\perp} = \hat{x} \partial / \partial x + \hat{y} \partial / \partial y$. Her vil vi reducere ligning (2.48) ved kun at betragte vinkelret udbredelse, $k \perp B_0$. Desuden vil vi antage følgende: magnetfeltet er relativt svagt, således at $|\nabla^2 \partial^2 \phi / \partial t^2| \gg |\Omega_e^2 \nabla_{||}^2 \phi|$; $|\nabla_{\perp} \phi| \gg |\nabla_{||} \phi|$ og $|\nabla_{\perp} \bar{n} / n_0| \gg |\nabla_{||} \bar{n} / n_0|$; $\nabla_{||} \bar{n} / n_0 \times \nabla \phi = 0$. Dette medfører efter integration 2 gange mht. tiden (integrationskonstanter negligeres)

$$\nabla_{\perp} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Te}^2 \nabla_{\perp}^2 + \omega_{UH}^2 \right) \nabla_{\perp} \phi = \nabla_{\perp} \cdot \left(\omega_{pe}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} \nabla_{\perp} \phi \right) \quad (2.49)$$

hvor vi har indført øvrehybrid frekvensen $\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + \Omega_e^2$. Det ses af (2.49), at dispersionsrelationen for lineære elektrostatisk øvrehybrid bølger er givet ved

$$\omega^2 = \omega_{UH}^2 + 3v_{Te}^2 k^2 \quad (2.50)$$

Som i foregående afsnit fjernes den hurtige tids- og rumvariation fra fasen ved at antage, at ϕ kan skrives som, idet vi indskrænker os til en endimensional beskrivelse

$$\phi = \frac{1}{2} \psi(t, x) e^{-i(\omega_0 t - kx)} + c.c. \quad (2.51)$$

Den komplekse amplitude ψ er langsomt varierende i rum og tid, og $\vec{k} = k(\omega_0) \hat{x}$ er givet ved (2.50). Efter indsettelse af (2.51) i (2.49) vil vi gøre følgende antagelser: $|\omega_0 \partial \psi / \partial t| \gg |\partial^2 \psi / \partial t^2|$; $|k\psi| \gg |\partial \psi / \partial x|$; $\omega_0 = \omega_{pe} \gg \Omega_e$; og negligere

alle integrationskonstanter. Af (2.50) får vi, at gruppehastigheden $v_g = (3v_{Te}^2/u_0)k$, og dens afledede $v_g' = d^2u/dk^2 = (3v_{Te}^2/u_0)(1-(3v_{Te}^2k^2/u_0^2)) = 3v_{Te}^2/u_0$. Ligning (2.49) kan herefter skrives som

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi + \frac{1}{2}v_g' \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = \frac{u_{pe}}{2} \frac{\bar{n}}{n_0} \psi \quad (2.52)$$

2.8 Lavfrekvente elektrostatiske ionakustiske bølger

Betragter vi et unmagnetiseret plasma, og antager, at oscillationerne er så langsomme, at elektronerne kan betragtes som et masseløst fluidum ($m = 0$), reducerer ligningerne (2.34) - (2.38) til (Dysthe og Pécseli (1977))

$$e\nabla\bar{\phi} - \frac{T_e}{n_0} \nabla\bar{n} - \frac{\epsilon_0}{2n_0} \nabla(\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}) = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{n} + n_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}}_i = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\mathbf{V}}_i = -\frac{e}{M}\bar{\nabla}\bar{\phi} - \frac{\gamma_i T_i}{n_0 M} \nabla\bar{n} \quad (2.55)$$

Ligning (2.53) beskriver en trykbalance for elektronerne. Det sidste led på venstre side af (2.53) er den ponderomotive kraft, som stammer fra en langsomt varierende amplitude af en højfrekvent bølge, såvel elektrostatisk som elektromagnetisk (se afsnit 4.2). Vi har anvendt approksimationen $(1/m)\overline{\nabla \cdot \nabla \phi} = (\epsilon_0/2n_0)\nabla\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}$ (Manheimer og Ott (1974)). Ligningerne kan let reduceres til ligningen for ionakustiske bølger drevet af ponderomotive kræfter

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2\right) \frac{\bar{n}}{n_0} = \frac{\epsilon_0}{2n_0 M} \nabla^2 (\vec{E} \cdot \vec{E}) \quad (2.56)$$

hvor lyd hastigheden $C_s^2 = (T_e + \gamma_i T_i)/M = T_e/M$, idet det er nødvendigt at kræve $T_e \gg T_i$, så det er tilladt at se bort fra Landau-dæmpning. Dispersionsrelationen for lineære ionakustiske bølger kan udledes af den homogene del af ligning (2.56). Dette giver

$$\omega^2 = C_s^2 k^2 \quad (2.57)$$

Indsættes ligning (2.44) for \vec{E} i (2.56) fås

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2\right) \frac{\bar{n}}{n_0} = \frac{\epsilon_0}{4n_0 M} \nabla^2 |\vec{G}|^2 \quad (2.58)$$

Ligning (2.45) og (2.58) kaldes normalt Zakharov's ligninger (Zakharov (1971)).

2.9 Lavfrekvente elektrostatisk ioncyklotron bølger

Vi vil her udlede en inhomogen ligning, der beskriver ioncyklotron bølger, der udbreder sig næsten vinkelret på magnetfeltet i et magnetiseret plasma, og hvor det inhomogene led er en ponderomotiv kraft stammende fra en højfrekvent bølge. Ioncyklotron bølgerne er beskrevet ved, at ionerne bevæger sig "vinkelret" på magnetfeltet, medens elektronerne opretholder en Boltzman ligevægt ved at bevæge sig langs magnetfeltet, som perler på en snor. Dette kan kun lade sig gøre, hvis komponenten af bølgernes udbredelseshastighed parallelt med \vec{B}_0 er mindre end V_{Te} , eller med andre ord perturbationernes bølgelængde parallelt med \vec{B}_0 opfylder kravet $2\pi V_{Ti}/\Omega_i < \lambda_{||} < 2\pi V_{Te}/\Omega_i$. Ligningerne (2.34) - (2.38) kan reduceres til (Dysthe og Pécseli (1978); Yu og Shukla (1977))

$$\frac{T_e}{n_0} \nabla \bar{n} - e \nabla \bar{\phi} + \frac{\epsilon_0}{2n_0} \nabla (\nabla \bar{\phi})^2 = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n} + n_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_i = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{v}}_i + \frac{\gamma_i T_i}{n_0 M} \nabla \bar{n} + \frac{e}{M} \nabla \bar{\phi} - \frac{e}{M} \bar{\mathbf{v}}_i \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.61)$$

Idet vi implicit har antaget, at perturbationerne varierer med en frekvens $\omega \ll \Omega_e$, således at elektronerne kan betragtes som et masseløst fluidum, der bevæger sig langs magnetfeltet, \mathbf{B}_0 og $(1/m) \nabla \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = (\epsilon_0/2n_0) \nabla (\nabla \bar{\phi})^2$ ($\nabla \bar{\phi}$ erstattes med $-\hat{\mathbf{E}}$, hvis det drejer sig om højfrekvente elektromagnetiske bølger, se også afsnit 4.2). Elimineres $\bar{\phi}$ og $\bar{\mathbf{v}}_i$ fås følgende ligning (se appendiks B)

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_i^2 - c_s^2 \nabla^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \Omega_i^2 \nabla_{\parallel}^2 \right] \frac{\bar{n}}{n_0} =$$

(2.62)

$$\left(\nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_i^2 \nabla_{\parallel}^2 \right) \frac{\epsilon_0}{2n_0 M} (\nabla \bar{\phi})^2$$

Vi ser, at den homogene del af (2.62), dvs. venstre side, tillader frie oscillationer, der tilfredsstiller dispersionsrelationen

$$(\omega^2 - K_{\parallel}^2 c_s^2) \left(1 - \left(\frac{\Omega_i}{\omega} \right)^2 \right) = K_{\parallel}^2 c_s^2 \quad (2.63)$$

der indeholder to grene $\omega^2 = \omega^2(\mathbf{K})$. For bølger der udbreder sig næsten vinkelret på \mathbf{B}_0 , dvs. $K_{\parallel}/K_{\perp} \ll 1$, er de to grene henholdsvis ioncyklotron bølger med

$$\omega^2 \approx \Omega_i^2 + c_s^2 K_{\perp}^2 \quad (2.64)$$

og ionakustiske bølger med

$$\omega^2 = c_s^2 k_{\parallel}^2 \quad (2.65)$$

Da vi her er mest interesseret i ioncyklotron bølgerne, vil vi reducere (2.62) ved at betragte en endimensional udbredelse langs x-aksen, og negligere de parallelle komponenter. Benyttes ligning (2.51) og $|k_{\parallel}| \gg |\partial \psi / \partial x|$, fås følgende approksimative ligning efter integration to gange mht. tiden

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_i^2 - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\bar{n}}{n_0} = \frac{\epsilon_0 k^2}{4Mn_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (|\psi|^2 - \langle |\psi|^2 \rangle) \quad (2.66)$$

hvor vi for komplethedens skyld har medtaget en integrationskonstant, som ikke er triviell, hvis den uperturberede højfrekvente bølge er plan!

2.10 Lavfrekvente elektrostatiske nedrehybrid bølger

I modsætning til ioncyklotron bølger har elektronernes inertibetydning ved udbredelsen af nedrehybrid bølger, og de er begrænset til kun at kunne udbrede sig vinkelret på \vec{B}_0 eller meget tæt herpå. Vi vælger at betragte perturbationer med frekvenser ω i området $\Omega_i \ll \omega \approx \sqrt{m/M} \Omega_e \ll \omega_{pe}$, således at ligningerne (2.34) - (2.38) kan reduceres til

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n}_e + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_e = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_e + \frac{T_e}{n_0 m} \nabla \bar{n}_e - \frac{e}{m} \nabla \bar{\phi} + \frac{e}{m} \vec{v}_e \times \vec{B}_0 + \frac{\epsilon_0}{2n_0 m} \nabla (\nabla \bar{\phi})^2 = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n}_i + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_i + \frac{\gamma_i T_i}{n_0 M} \nabla \bar{n}_i + \frac{e}{M} \nabla \bar{\phi} = 0 \quad (2.70)$$

$$\bar{n} = \bar{n}_e = \bar{n}_i \quad (2.71)$$

Ved en procedure tilsvarende den der blev brugt i afsnit 2.9, reduceres disse ligninger til (se appendiks C).

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_i \Omega_e - C_s^2 v^2 \right) v^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_e^2 v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 v^2 \right) \right] \frac{\bar{n}}{n_0} = \quad (2.72)$$

$$v^2 \left(v^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_e^2 v^2 \right) \frac{\epsilon_0}{2n_0 M} (\nabla \phi)^2$$

Den homogene del af (2.72) dvs. den venstre side, har som før to grene, $\omega^2 = \omega^2(\vec{k})$. Vi er her interesseret i grenen for nedrehybrid bølger, der er givet ved

$$\omega^2 = \Omega_{LH}^2 + C_s^2 k_{\perp}^2 \quad (2.73)$$

som fremkommer ved at antage $k_{\parallel}/k_{\perp} \ll 1$. $\Omega_{LH}^2 = \Omega_e \Omega_i$ er nedrehybrid frekvensen. Ved at gøre samme antagelser som før, får vi følgende approksimative ligning gældende for endimensional udbredelse langs x-aksen.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_{LH}^2 - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\bar{n}}{n_0} = \frac{\epsilon_0 k^2}{4n_0 M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (|\psi|^2 - \langle |\psi|^2 \rangle) \quad (2.74)$$

Det skal her bemærkes, at nedrehybrid frekvensen normalt ses givet ved $\Omega_{LH}^2 = \omega_{pi}^2 / (1 + \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2)$, men som vi ser i grænsen $\omega_{pe} \gg \Omega_e$, er de to udtryk ens.

3. LINEÆRE BØLGERS INDRÆNGNING OG UDBREDELSE I ET HOMOGENT PLASMA

3.1 Laplace - og Fouriertransformation

I dette afsnit vil vi eksplicit betragte indtrængningen af en elektromagnetisk bølge i et homogent isotropt plasma. Vi vil betragte to situationer, det ene, hvor bølgen tænkes exciteret af en ekstern strømkilde på randen af plasmaet, og det andet, hvor bølgefeltet tænkes givet på randen af plasmaet (Jovanović m.fl. (1982)). Da det specielt er udbredelsen af bølgefronten, der er af interesse, vil vi antage, at bølgenes udstrækning på tværs af udbredelsesretningen er uendelig, og dermed kan vi benytte en endimensionel beskrivelse.

Først tænker vi os en extern strømkilde givet på randen af et halvuendeligt plasma ($x \geq 0$). Strømkilden beskrives ved en strøm \vec{I} , givet ved

$$\vec{I}(t, x) = \vec{I}_0 \delta(x) \sin(\omega_0 t) h(t) \quad , \quad \omega_0 > \omega_{pe} \quad (3.1)$$

hvor $\delta(x)$ er Dirac's deltafunktion, og $h(t)$ Heaviside's step-funktion defineret ved

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ligning (3.1) beskriver en oscillerende strøm, med frekvensen ω_0 og konstant amplitude \vec{I}_0 , på randen af plasmaet ($x = 0$), der bliver tændt til tiden $t = 0$. Vi antager nu, at denne strøm vil excitere en elektromagnetisk bølge, samt at excitationen og udbredelsen af denne bølge er beskrevet ved den homogene del af (2.7), plus et drivled stammende fra strømmen givet ved (3.1). Problemet er derfor at finde løsningen til

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \omega_{pe}^2 \vec{E} \right) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{I}(t, x) \quad (3.3)$$

for $x, t > 0$, givet $\vec{E}(t=0, x) = 0$, og \vec{I} givet ved (3.1). Laplace- og Fouriertransformation af (3.3) i henholdsvis tid og rum resulterer i, at $\vec{E}(\omega, k)$ er givet ved

$$\vec{E}(\omega, k) = \frac{\mu_0 c^2}{c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 - \omega^2} \frac{-i\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{I}_0 \quad (3.4)$$

hvor vi har brugt

$$\vec{I}(\omega, k) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{I}_0 \quad (3.5)$$

Det kan vises ved benyttelse af residueregning at

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ce^{ikx}}{c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 - \omega^2} dk = \frac{e^{-\frac{x}{c} \sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}}}{\sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}}, \quad x > 0 \quad (3.6)$$

Ved at benytte dette ved den inverse Fouriertransformation af (3.4) har vi

$$\vec{E}(t, x) = \frac{\omega_0}{2c\epsilon_0} \vec{I}_0 \frac{1}{2\pi} \int_C f_1(\omega) f_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.7)$$

hvor $f_1(\omega)$ er givet ved (3.6), og $f_2(\omega) = -i\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Ved benyttelse af foldningsreglen ved den inverse Laplacetransformation, fås endelig

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & , \quad t < \frac{x}{c} \\ \frac{\omega_0}{2c\epsilon_0} \vec{I}_0 \int_0^{t-\frac{x}{c}} J_0\left(\frac{\omega_{pe}}{c}(c^2(t-\tau)^2-x^2)^{1/2}\right) \cos \omega_0 \tau d\tau & , \quad t > \frac{x}{c} \end{cases} \quad (3.8)$$

hvor J_0 er den 0'te ordens Besselfunktion af 1. art.

I det andet tilfælde tænker vi os, at feltet på randen ($x = 0$) er givet på følgende måde:

$$E_x(t, x=0) = 0$$

$$E_y(t, x=0) = E_0 h(t) \sin \omega_0 t \quad , \quad \omega_0 > \omega_{pe} \quad (3.9)$$

$$E_z(t, x=0) = 0$$

Problemet er da at løse ligningen givet ved den homogene del af (3.3) med randbetingelsen (3.9). Da plasmaet er homogent og isotropt, vil E_x og E_z forblive 0 for alle $t, x > 0$. Løsningen vil derfor beskrive udbredelsen af en i y -retningen lineært polariseret elektromagnetisk bølge. Vaĭnshteĭn (1976) angiver en metode, hvormed løsningen kan findes. Først findes plasmaets svar $g(t, x)$ (Green's funktionen) på en deltafunktion,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

givet på randen. I stedet for Laplacetransformation anvendes nu Fouriertransformation i tiden (se (2.11) og (2.12)). Funktionen $g(t, x)$ er da bestemt af

$$g(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega t - k(\omega)x)} d\omega \quad (3.10)$$

med randbetingelsen $g(t,0) = \delta(t)$, og $k(\omega)$ givet ved dispersionsrelationen (2.8). Bemærk at (3.10) ikke er andet end en superposition af såvel dæmpede (k imaginær) som udæmpede monokromatiske bølger (k reel). Løsningen til (3.10) med $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$ er

$$g = h(t - \frac{x}{c}) \left[\delta(t - \frac{x}{c}) - \frac{\omega_{pe} x}{(c^2 t^2 - x^2)^{1/2}} J_1 \left(\frac{\omega_{pe}}{c} (c^2 t^2 - x^2)^{1/2} \right) \right] \quad (3.11)$$

hvor J_1 er den 1'te ordens Besselfunktion af 1. art. $E_y(t,x)$ er herefter givet ved

$$E_y(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau, x) E_y(\tau, 0) d\tau, \quad t > \frac{x}{c} \quad (3.12)$$

Indsættelse af (3.9) og (3.12) giver

$$E_y = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c} \\ E_0 \left[\sin(\omega_0(t - \frac{x}{c})) - \int_0^{t - \frac{x}{c}} \frac{\omega_{pe} x}{(c^2(t-\tau)^2 - x^2)^{1/2}} J_1 \left(\frac{\omega_{pe}}{c} (c^2(t-\tau)^2 - x^2)^{1/2} \right) \sin \omega_0 \tau d\tau \right] \end{cases} \quad (3.13)$$

$, \quad t > \frac{x}{c}$

Begge løsninger (3.8) og (3.13) indeholder et foldningsintegral, hvilket indebærer, at det kan være svært at gennemskue, hvordan løsningerne egentlig ser ud. Det fremgår dog klart, at de begge opfylder kravet om kausalitet, idet begge løsninger er identisk lig med 0 for $t < x/c$, i overensstemmelse med at intet signal kan udbrede sig med hastigheder hurtigere end lyshastigheden c . Begge metoder vil også være anvendelige ved andre bølgetyper.

3.2. Saddelpunktsintegration

Resten af dette kapitel vil omhandle, hvorledes approksimative, men relativt let gennemskuelige, løsninger kan findes til problemer som det sidste i afsnit 3.1. I dette afsnit skal vi kort gennemgå, hvorledes det er muligt v.hj.a. saddelpunktsintegration at finde asymptotiske løsninger (dvs. for x og t store). Netop det sidste problem i afsnit 3.1 er behandlet af bl.a. Haskell og Case (1967). Vi vil derfor blot skitsere metoden, og give hovedresultaterne. Løsningen kan formelt skrives på formen

$$E_Y(t > 0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\omega_c}^{+\infty + i\omega_c} E_Y(\omega, 0) e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} d\omega \quad (3.14)$$

hvor $E_Y(\omega, 0)$ er den Laplacetransformerende af (3.9), og $k(\omega)$ er givet ved (2.8). Indfører vi nu følgende betegnelser

$$\tau = \omega_0 t, \quad \eta = \frac{\omega_0 x}{c}, \quad \zeta = \frac{\tau}{\eta} = \frac{ct}{x} \quad (3.15)$$

$$p = \frac{\omega_{pe}}{\omega_0}, \quad s = -i \frac{\omega}{\omega_0}$$

får (3.14) formen

$$E_Y(\tau > 0, \eta) = \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s_c - i\infty}^{s_c + i\infty} \frac{1}{s^2 + 1} \exp\left[\eta s \left(\zeta - \left(1 + \frac{p^2}{s^2}\right)^{1/2}\right)\right] ds$$

hvor $s_c = \omega_c/\omega_0$ er valgt således, at alle integrandens singulariteter ligger til venstre for integrationsvejen i den komplekse s -plan.

For η stor er det muligt at give en asymptotisk løsning til (3.16) (Haskell og Case (1967)). Her vil vi som sagt kun angive

de vigtigste resultater. Så længe $\tau - \eta \ll \eta p^2/2$ er det en god tilnærmelse at rækkeudvikle argumentet til $\exp(\quad)$ i størrelsen p^2/s^2 (en højfrekvensudvikling), og antage $s^2+1 = s^2$. I denne grænse er løsningen givet ved (for $\tau - \eta < 0$ lukkes integrationsvejen i højre halvplan, for $\tau - \eta > 0$ i venstre halvplan)

$$E_Y(\tau > 0, \eta) = \begin{cases} 0 & , \tau - \eta < 0 \\ \frac{E_0}{p^2 \eta} \sqrt{u} J_1(\sqrt{u}) h(u) & , \tau - \eta > 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

hvor $u = 2p^2 \eta (\tau - \eta)$.

Løsningen (3.17) er kendt som Sommerfeld's løsning, og benævnes ofte som forløberen. For større τ bryder denne tilnærmelse sammen. I stedet kan integralet for senere tider løses ved saddelepunktsintegration. Vi bemærker, at integranden i (3.16) har poler for $s = \pm i$, et forgreningssnit mellem $\pm i p$, og saddelepunkter for $s = \pm i p \zeta / (\zeta^2 - 1)^{1/2}$. For $\zeta = 1$ (dvs. $\tau = \eta$) er saddelepunkterne $\pm i\infty$, som tiden går, bevæger de sig ind langs den imaginære akse, og nærmer sig $\pm i p$ for store tider. Tidspunktet, hvor saddelepunkterne krydser polerne, er givet ved $t_g = x/V_g$, med gruppehastigheden $V_g = (d\omega/dk)_{\omega_0}$ givet ved (2.8).

Den forudgående (anterior) transiente løsning, dvs. for voksende ζ^2 , men hvor saddelepunkterne stadig er langt fra polerne, findes ved at deformere integrationsvejen til at gå gennem saddelepunkterne ad den vej, hvor integranden aftager mest (line of steepest descent). For $t \rightarrow t_g$ ankommer hovedsignalet, og vi må supplere saddelepunkternes bidrag med polbidragene. En tilnærmet løsning er givet ved

$$E_Y(\tau, \eta) \approx E_0 B(v) \sin[\eta(\zeta - (1-p^2)^{1/2}) + \theta_0(v)] \quad (3.18)$$

$$B(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{2} + C(v) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S(v) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.19)$$

$$\theta_0(v) = \text{Arctan} \left[\frac{C(v) - S(v)}{1 + C(v) + S(v)} \right] \quad (3.20)$$

$$v = \left(\frac{n}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(1 - p^2)^{3/4}}{p} (\zeta - \zeta_g) \quad (3.21)$$

$$\zeta_g = \frac{1}{(1 - p^2)^{1/2}} \quad (3.22)$$

hvor vi har indført Fresnell's cosinus og sinus integraler, defineret ved

$$C(v) = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad (3.23)$$

$$S(v) = \int_0^v \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad (3.24)$$

Tilslidst, når saddelpunkterne igen er langt fra polerne, fås den efterfølgende (posterior) transiente løsning, som, bortset fra en lille oscillerende del stammende fra saddelpunkterne, er vel beskrevet ved polbidragene alene (se evt. app. i Yeh og Liu (1972), der omhandler saddelpunktsintegration).

Vi er nu i stand til at resumere hele det transiente forløb. Tænkes feltet givet ved (3.9) på randen $x = 0$, vil en tilskuer placeret på positionen x ($x > c/\omega_0$) intet bemærke før $t = x/c$ (kausalitet). Derefter vil han se forløberen, indtil $t \sim x/V_g$ vil amplituden af dette signal være meget lille, derefter vil signalet vokse op i overensstemmelse med (3.18). $B(v)$ og $\theta_0(v)$ er vist i fig. 1. Vi ser, at fasen θ_0 varierer hurtigt i fronten, dvs. den del af signalet med de største frekvenser ankommer først. Dette er i overensstemmelse med dispersionsrelationen $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$. Til $t = x/V_g$ observerer tilskueren den

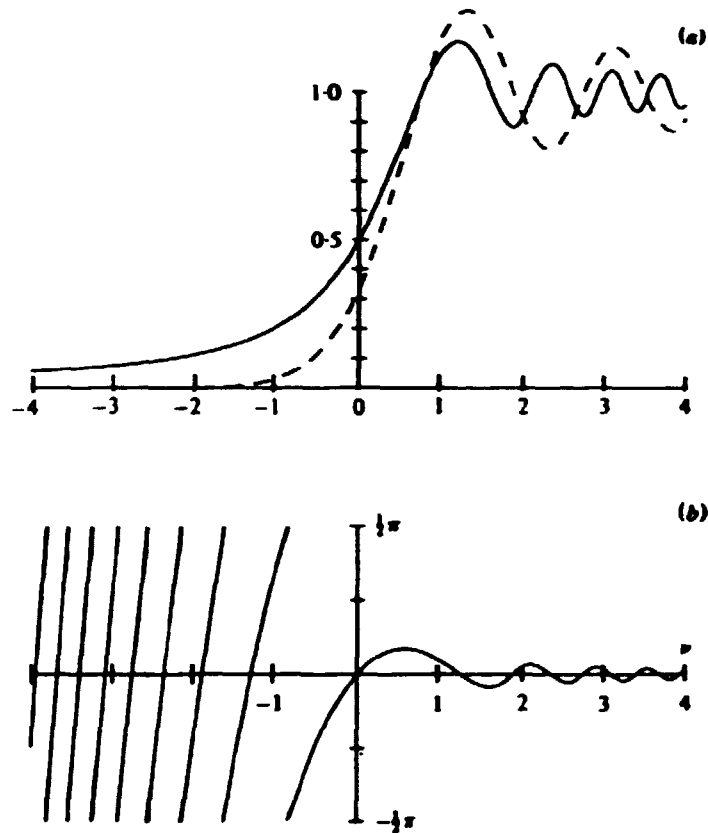


Fig. 1. (a) —: $B(v)$ fra ligning (3.18).
 ----: $G(t,x)$ fra ligning (3.28) som funktion af $\theta/\sqrt{\pi}\Delta$. (b) Fasen $\theta_0(v)$ fra ligning (3.20).

påtrykte svingning med netop den halve amplitude. Signalet vokser derefter op til fuld amplitude overlejret af en mindre oscillerende del, hvis periode vokser langsomt i tiden med aftagende amplitude, for til sidst at dø ud, se fig. 1.

Med ligning (3.18) er det altså lykkedes os at adskille den hurtige fasevariation i tid og rum fra den langsomt varierende amplitude, idet $\sin[\eta(\zeta-(1-p^2)^{1/2})+\theta_0(v)] = \sin(\omega_0 t - kx + \theta_0)$, af hovedsignalet (Dette sætter os i stand til at beregne et tilnærmet udtryk for den ponderomotive kraft, se afsnit (4.2)). For $v = 0$ ($t=x/V_g$) har vi

$$\frac{\partial}{\partial \eta} B(v(\tau, \eta)) = \left(\frac{d}{dv} B \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = - \zeta_g^{3/2} \frac{(1 - p^2)^{3/4}}{2p/\pi\tau} \quad (3.25)$$

hvilket forudsiger en relativ langsom tidsvariation ($\sim 1/\sqrt{\tau}$) af fronten for x og t store. Vi kan altså i en første tilnær- melse antage, at bølgens indhylningskurve udbreder sig som en stepfunktion med gruppehastigheden V_g som forventet. Bemærk at $v = (t - x/V_g)(x/(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0})^{-1/2}$.

3.3 Rækkeudvikling af dispersionsrelationen

I forrige afsnit fandt vi en tilnærmet løsning for bølgefron- tens udbredelse for en bølgetype med dispersionsrelationen $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$. Da analysen udelukkende var bestemt af denne, er det klart, at andre bølgetyper, givet ved dispersionrelatio- ner af samme form, vil opføre sig tilsvarende, hvis blot ω_{pe}^2 og c^2 erstattes af de aktuelle størrelser. I de tilfælde, hvor dispersionsrelationen, for små k , kan tilnærmes med denne form, må vi også forvente, at frontens udbredelse er givet ved en tilnærmelse lig (3.18) - (3.22). I de tilfælde, hvor en sådan tilnærmelse bryder sammen, er det muligt ved hjælp af en række- udvikling af dispersionsrelationen omkring den påtrykte frekvens ω_0 at give et tilnærmet udtryk for fronten af hovedsignalet. Hvis der eksisterer frekvenser, hvor gruppehastigheden har eks- trema, må der forventes forløbere startende med disse frekven- ser (Brillouin (1960)). I denne sammenhæng vil vi koncentrere os om hovedsignalet, og negligere eventuelle forløbere.

Når den givne frekvens ω_0 kan dispersionsrelationen tilnærmes med

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \Delta\omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \Delta\omega^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3k}{d\omega^3} \right|_{\omega_0} \Delta\omega^3 \quad (3.26)$$

hvor $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

Medtages kun led til og med $(1/2)(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0}$, er den komplekse amplitude $\mathcal{E}(t,x)$ til den udbredende bølge $e^{-i(\omega_0 t - k(\omega_0)x)}$ tilnærmelsesvis givet ved (Baerwald (1930))

$$\mathcal{E}(t,x) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta/\Delta} \exp(i(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tau^2)) d\tau \quad (3.27)$$

hvor E_0 er begyndelsesamplituden, $\theta = t - x(dk/d\omega)_{\omega_0}$ og $\Delta = (x(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0})^{1/2}$. Det er interessant at bemærke, at resultatet (3.27) er identisk (3.18) - (3.20).

Hvis $(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0} = 0$ medtages den 3. afledede, og resultatet bliver (Baerwald (1930))

$$\mathcal{E}(t,x) = E_0 \int_{-\infty}^{\theta/\Delta} \text{Ai}(-\tau) d\tau \quad (3.28)$$

med θ, E_0 som før, men med $\Delta = ((1/2)x(d^3k/d\omega^3)_{\omega_0})^{1/3}$. $\text{Ai}(z)$ er Airy funktionen, som er defineret ved

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(sz + \frac{1}{3}s^3)) ds \quad (3.29)$$

Modulus af \mathcal{E} i (3.28) er vist i fig. 1. Vi bemærker, selvom der er forskelle mellem (3.27) og (3.28), at den generelle opførsel af modulus næsten er identisk. Fasen af (3.28) er derimod 0, idet $\mathcal{E}(t,x)$ er reel i dette tilfælde.

3.4. Selvsimilære løsninger

Det bemærkes, at de tilnærmede løsninger givet ved (3.18) - (3.22), (3.27) og (3.28), alle er på en form, som kaldes selvsimilær. I disse løsninger er de uafhængige selvsimilære variable henholdsvis v og θ/Δ . Den selvsimilære løsningsmetode (se f.eks. Lonngren (1976)) blev dog ikke eksplicit benyttet ved udledelsen af disse løsninger. I dette afsnit vil vi anvende denne metode på det følgende endimensionale og lineære problem.

Den højfrekvente bølge antages at være beskrevet ved

$$E(t, x) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(t, x) e^{-i(\omega_0 t - k(\omega_0) x)} + \text{c.c.} \quad (3.30)$$

For det tilfælde, hvor den komplekse amplitude eller indhylning \mathcal{E} er langsomt varierende i både tid og rum, har vi i kapitel 2 vist, at både Langmuir bølger og øvrehybrid bølger kan beskrives ved (se ligningerne (2.47) og (2.52), og bemærk tilnærmelserne der førte disse)

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{E}\right) + \frac{1}{2} v_g' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{E} = 0 \quad (3.31)$$

hvor $v_g = (d\omega/dk)_{\omega_0}$ og $v_g' = (d^2\omega/dk^2)_{\omega_0}$ er givet ved den aktuelle dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$. Ligning (3.31) er dog ret generel, idet den egentlig blot er en rækkeudvikling af dispersionsrelationen til anden orden. Dette kan anskueliggøres på følgende måde: Rækkeudvikles dispersionsrelationen $\omega = \omega(k)$ omkring $\omega_0 = \omega(k_0)$, fås

$$\omega = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{\omega_0} (k - k_0)^2 + \dots \quad (3.32)$$

Substituerer vi nu $(\omega - \omega_0)$ med operatoren $i\partial/\partial t$, og $(k - k_0)$ med operatoren $-i\partial/\partial x$, og lader den resulterende operator virke på \mathcal{E} (Hasegawa (1976)), får vi netop (3.31). Vi vil nu løse (3.31) med rand- og begyndelsesbetingelser, der er aktuelle for det i afsnit 3.1 sidst beskrevne problem.

I overensstemmelse med (3.9) skal løsningen til (3.30) opfylde følgende betingelser

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x = 0) &= E_0 \\ \mathcal{E}(t = 0, x > 0) &= 0 \\ \mathcal{E}(t, x \rightarrow \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Det er bekvemt at beskrive udbredelsen i et koordinatsystem, der bevæger sig med hastigheden V_g . Vi indfører derfor

$$\begin{aligned}\xi &= x - V_g t \\ \tau &= t\end{aligned}\tag{3.34}$$

I dette system lyder (3.31)

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{E} + \frac{1}{2} V_g' \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{E} = 0\tag{3.35}$$

og (3.33) transformerer til

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\tau, \xi \rightarrow -\infty) &= E_0 \\ \mathcal{E}(\tau = 0, \xi > 0) &= 0 \\ \mathcal{E}(\tau, \xi \rightarrow +\infty) &= 0\end{aligned}\tag{3.36}$$

Ligning (3.35) tillader en selvsimilær løsning (Lonngren m.fl. (1982)). Indføres den uafhængige selvsimilære variabel z ved

$$z = \frac{\xi}{\sqrt{2\tau}}\tag{3.37}$$

kan (3.35) transformeres til en 2. ordens ordinær differential ligning

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathcal{E} + \frac{z}{iV_g'/2} \frac{d}{dz} \mathcal{E} = 0\tag{3.38}$$

og betingelserne (3.36) transformerer til

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z \rightarrow -\infty) &= E_0 \\ \mathcal{E}(z \rightarrow +\infty) &= 0\end{aligned}\tag{3.39}$$

Det er her vigtigt at bemærke, at transformationen (3.37) kun går godt i dette tilfælde, fordi de to sidste betingelser i (3.36) smelter sammen. Integration to gange af (3.38) mht. z giver

$$\mathcal{E}(z) = \frac{E_0}{1+i} \left[\left(\frac{1}{2} - C\left(\frac{z}{\sqrt{V_g}}\right) \right) + i \left(\frac{1}{2} - S\left(\frac{z}{\sqrt{V_g}}\right) \right) \right] \quad (3.40)$$

hvor Fresnell integralerne C og S er defineret i henholdsvis (3.23) og (3.24). Går vi tilbage til det oprindelige koordinatsystem, er løsningen givet ved

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{E_0}{1+i} \left[\left(\frac{1}{2} - C\left(\frac{x-V_g t}{\sqrt{2V_g t}}\right) \right) + i \left(\frac{1}{2} - S\left(\frac{x-V_g t}{\sqrt{2V_g t}}\right) \right) \right] \quad (3.41)$$

Det ses, at formen af løsningen (3.41) er identisk med løsningen (3.18) - (3.22) og dermed også løsningen (3.27). Den eneste forskel er, at x og t afhængigheden er byttet om. Det kommer af, at vi før betragtede situationen som et randværdiproblem (ω_0 var givet), medens vi i dette tilfælde har betragtet situationen som et begyndelsesværdiproblem (k_0 var givet).

4. DISKUSSION AF ULINEARITETER I HOMOGENE PLASMAER

4.1. Genereringen af harmoniske ved udbredelsen af ulineære bølger

Generelt er den simpleste ulineære effekt ved bølgeudbredelse i plasma genereringen af harmoniske. Vi vil i en første tilnærmelse regne genereringen af 2. harmoniske for den vigtigste, og negligere højere harmoniske. Betragter vi i et plasma udbredelsen af en bølge, givet ved (ω_0, k_0) . Plasmaets ulineariteter vil give anledning til, at der på det pågældende sted findes, hvad der kan kaldes en dreven bølge med $(2\omega_0, 2k_0)$. Dennes type er

ikke nødvendigvis identisk med typen af den fundamentale bølge (ω_0, k_0) . Hvis der i det pågældende plasma kan eksistere bølger af samme type som den drevne bølge, samtidigt med at $(2\omega_0, 2k_0)$ opfylder disse bølgers dispersionrelation, vil den drevne bølge give anledning til en resonant excitation af disse bølger. Hvis $(2\omega_0, 2k_0)$ er nær ved at opfylde dispersionsrelationen, vil den drevne bølge også excitere disse bølger. Hvor kraftigt disse bølger exciteres afhænger altså af, hvor nær $(2\omega_0, 2k_0)$ er ved at opfylde dispersionsrelationen. For de højfrekvente bølgetyper, vi betragter, er det imidlertid kun for ekstraordinære bølger, at denne drevne bølge kan være af betydning i beskrivelsen af det transiente forløb ved udbredelsen, hvilket vil fremgå af det følgende.

Vi betragter først det umagnetiserede tilfælde, hvor vi har valgt at undersøge de elektromagnetiske bølger givet ved (2.7), og Langmuir bølgerne givet ved (2.42). I et homogent umagnetiseret plasma kan elektromagnetiske bølger ikke generere 2. harmoniske direkte. Dette kan ses ved at indsætte den lineære løsning til ligningerne (2.1) - (2.6) i de ulineære led på højre side af ligning (2.7). Den lineære løsning kan skrives som: $n_1 = 0$, $\vec{v}_1 = -ie\vec{E}_1/m\omega_0$ og $\vec{B}_1 = -i\nabla \times \vec{E}_1/\omega_0$. Dette medfører, at de ulineære led reducerer til $(e/m)(\omega_{pe}/\omega_0)^2 \nabla(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1) + c.c.$, som ses at være en vektor parallel med \vec{k}_0 . Med andre ord: den drevne bølge $(2\omega_0, 2k_0)$ er rent elektrostatisk, og vil af samme grund kun være i stand til at excitere elektrostatiske bølger. Umiddelbart kunne det forventes, at elektrostatiske bølger, givet ved $(2\omega_0, k(2\omega_0))$ og $(\omega(2k_0), 2k_0)$, ville blive exciteret. Den første af disse vil dog være stærkt Landau-dæmpet, og den anden vil, idet $2\omega_0 \gg \omega(2k_0) \sim \omega_{pe}$, være meget svagt exciteret. For Langmuir bølger kan disse argumenter anvendes igen, så også i dette tilfælde er genereringen af harmoniske uden betydning.

I et homogent, magnetiseret plasma vil vi som nævnt i indledningen kun betragte bølger, der udbreder sig vinkelret, eller næsten vinkelret, på magnetfeltet. Af disse bølgetyper har vi valgt at se på de ordinære bølger (2.22), de ekstraordinære bølger (2.23) og de elektrostatiske øvrehybrid bølger beskrevet ved (2.49). De førnævnte argumenter kan anvendes igen på de or-

dinære elektromagnetiske bølger og øvrehybrid bølgerne, således at genereringen af harmoniske er uden betydning ved udbredelsen af disse.

For de ekstraordinære bølger er situationen imidlertid en helt anden, idet bølgerne både har et elektrostatisk og et elektromagnetisk indhold, samt at der eksisterer to dispersionsgrene, se fig. 2, betegnet henholdsvis den langsomme og den hurtige gren. Bemærk at for store k er bølgerne, beskrevet ved den hurtige gren, rent elektromagnetiske, medens bølgerne, beskrevet ved den langsomme gren, er rent elektrostatiske (i den varme plasmabeskrivelse er fortsættelsen af denne gren netop øvrehybrid bølgerne). Diskussionen her er for k lille. Af fig. 2 ses, at der er mulighed for en resonant excitation af 2. harmoniske, dvs. den drevne bølge ($2\omega_0, 2k_0$) netop ligger på den hurtige gren. I et homogent plasma er denne proces dog kun mulig for netop et valg af ω_0 . Det er derfor mere relevant at undersøge tilfælde, hvor den drevne bølge ($2\omega_0, 2k_0$) er ikke resonant, men dog tæt herpå. I kapitel 5 vil vi se nærmere på dette tilfælde.

I tilfælde, hvor plasmaets udstrækning er begrænset (som i en Q-maskine), kan harmoniske være af betydning for f.eks. de elektrostatisk bølger, se Sato m.fl. (1976). Ligeledes er dette også en mulighed i inhomogene plasmaer, se f.eks. Tewari og Tripathi (1980).

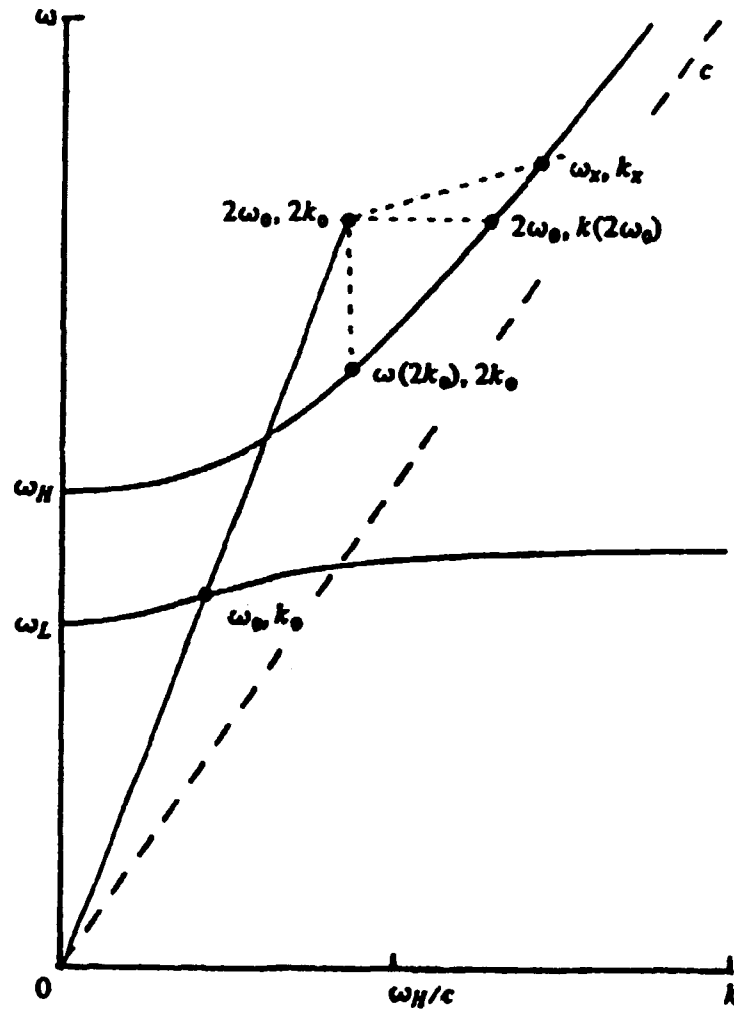


Fig. 2. Dispersionsrelationen for ekstraordinære elektromagnetiske bølger i et magnetiseret plasma, ligning (2.33) er her vist for $\omega_{pe}^2 = 9\Omega_e^2$. ω_H og ω_L er defineret i ligningerne (2.24) og (2.25), medens de øvrige symboler er defineret i kapitel 5.

4.2. Kobling til lavfrekvente bølger via ponderomotive kræfter

Den ulineære proces, hvor en højfrekvent bølge modificerer plasma-tætheden via ponderomotive kræfter (se f.eks. Chen (1974)), er særdeles vigtig i denne sammenhæng. Dette gælder udbredelsen af såvel elektromagnetiske som elektrostatisk bølger. Disse kræfter er knyttet til rumlige variationer i indhylningskurven af højfrekvente bølger. De ponderomotive kræfter virker både på elektroner og ioner, men pga. den store masseforskel negligeres virkningen af disse på ionerne. Ionerne påvirkes dog inddirekte, idet der sker en ladningsseparation, når de ponderomotive kræfter virker på elektronerne, som giver anledning til et ambipolært elektrisk felt, som så påvirker ionerne.

En eventuel tæthedsperturbation, forårsaget af ponderomotive kræfter hidrørende fra en højfrekvent bølges front, vil vi her antage beskrevet som drevne lavfrekvente bølger, såsom ionakustiske bølger i et umagnetiseret plasma (afsnit 2.8). I et magnetiseret plasma er også elektrostatisk ioncyklotron bølger (afsnit 2.9) samt elektrostatisk nedrehydrid bølger (afsnit 2.10) aktuelle. I den matematiske beskrivelse af disse lavfrekvente bølgetyper i kapitel 2 har vi derfor medtaget led, der beskriver denne ulineære proces. For at være mere præcis er de ponderomotive kræfter medtaget via leddet $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{\phi}$ i ligning (2.35), medens det ambipolære felt er beskrevet ved potentialet $\vec{\phi}$ i ligningerne (2.35) og (2.37). Betragtes eksplicit en højfrekvent bølge med frekvensen ω_0 , kan de ponderomotive kræfter approksimeres ved (Manheimer og Ott (1974))

$$\vec{F} = - n_0 m \overline{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} = - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2} \nabla (\vec{E} \cdot \vec{E}) \quad (4.1)$$

hvor \vec{E} er det totale højfrekvente elektriske felt. For at (4.1) også er gyldig for magnetiserede plasmaer, må vi dog kræve $\omega_0 \gg \omega_{pe}$. Se evt. Karpman og Shagalov (1982), der giver det fulde udtryk for de ponderomotive kræfter i et koldt magnetiseret plasma. I det tilfælde, hvor \vec{E} kan udtrykkes på formen som i ligning (2.46), kan ligning (4.1) i det endimensionale tilfælde også skrives som (vi sætter $\omega_{pe}^2/\omega_0^2=1$)

$$\vec{F}(t, x) = - \frac{\epsilon_0 \hat{x}}{4} \frac{\partial}{\partial x} |\vec{E}(t, x)|^2 \quad (4.2)$$

Betragter vi specielt elektrostatiske højsfrekvente bølger kan \vec{E} erstattes af $-\nabla\phi$ i (4.1), således

$$\vec{F} = - \frac{\epsilon_0}{2} \nabla (\nabla\phi)^2 \quad (4.3)$$

Indsætter vi i (4.3) ϕ , givet på formen (2.51), får vi for det endimensionale tilfælde

$$\vec{F}(t, x) = - \frac{\epsilon_0 k^2}{4} \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} (|\psi|^2 - \langle |\psi|^2 \rangle) \quad (4.4)$$

hvor $k = k(\omega_0)$ er givet ved den aktuelle dispersionsrelation. Her har vi medtaget integrationskonstanten $\langle |\psi|^2 \rangle$, som er en påmindelse om, at en uendelig plan bølge ikke giver anledning til nogen ponderomotiv kraft. $\langle |\psi|^2 \rangle$ er altså ikke andet end en rumlig middelværdi af $|\psi|^2$.

Vi betragter nu udbredelsen af en højsfrekvent bølge. I kapitel 3 fandt vi, at bølgefronten ændrer sig langsomt i et reference-system, der bevæger sig med gruppehastigheden V_g , sådan at vi i en første tilnærmelse kan antage, at $\vec{F} = \vec{F}(x - V_g t)$. Det drivende led i de lavfrekvente ligninger for tæthedsvariationen vil da have en lignende $x - V_g t$ afhængighed. Væsentlige tæthedsperturbationer forekommer da i de tilfælde, hvor V_g er lig fasehastigheden af en mulig lavfrekvent bølgetype, altså en resonant vekselvirkning. Hvis ionakustiske var den eneste mulige lavfrekvente bølgetype, ville denne effekt for de højsfrekvente elektromagnetiske bølger, vi har valgt at betragte (se afsnittene 2.3 og 2.4), være negligibel. Betragtes et umagnetiseret plasma, måtte vi da kræve $V_g \approx C_s$ ($\approx \sqrt{T_e/M}$). Bruges ligning (2.8), får vi

$$V_g = \frac{c^2 k}{\omega_0} = \frac{c}{\omega_0} (\omega_0^2 - \omega_{pe}^2)^{1/2} \quad (4.5)$$

Derfor vil kravet $V_g = C_s$ betyde at $(\omega_{pe}/\omega_o)^2 = 1 - T_e/Mc^2$. Tager vi f.eks. et plasma med enkeltladede argon ioner, og hvor $T_e = 10$ eV, svarer dette til $(\omega_{pe}/\omega_o)^2 = 1 - 10^{-10}$. Hvis vi nu tillader en lille variation δn af plasmatætheden, ses det let, at $\delta n/n_o > 10^{-10}$ medfører at $\omega_o < \omega_{pe}$, hvilket vil sige, at bølgen overhovedet ikke kan udbrede sig. Til sammenligning kan vi betragte de termiske fluktuationer, der svarer til denne elektrontemperatur. Den spektrale tæthed $S_N(\vec{k}')$ for relative fluktuationer i elektrontætheden er (se f.eks. Yeh og Liu (1972))

$$S_N(\vec{k}') = \frac{\pi T_e |\vec{k}'|^2}{m(\omega_{pe}^2 + \frac{1}{2} T_e |\vec{k}'|^2/m)} = \pi (k' \lambda_{De})^2 \quad (4.6)$$

for k' lille. Med $\lambda_{De} = 0.2$ mm for $n_o = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ har vi $\sqrt{S_N(k')} > 10^{-10}$ for $k' > 2 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$, svarende til bølgelængder $\lambda < 3 \times 10^2 \text{ m}$. Dette indikerer, at denne standardbehandling af ulinear bølgevekselvirkning (Kaw og Nishikawa (1975); Baumgärtel og Zchakaja (1977)), som vi benytter, ikke er anvendelig for dette tilfælde. De samme argumenter vil også være aktuelle for de ordinære og ekstraordinære bølger i et magnetiseret plasma. For de højfrekvente elektrostatiske bølger, Langmuir bølger og øvrehybrid bølger, er det dog realistisk at betragte $V_g < C_s$, så derfor har vi medtaget de ionakustiske bølger som en mulig lavfrekvent bølgetype.

I denne sammenhæng er det mest interessante dog at betragte udbredelsen af højfrekvente bølger i et magnetiseret plasma, hvor der eksisterer lavfrekvente bølgetyper med arbitrære høje fasehastigheder. Vi vil her fremhæve elektrostatiske ioncyklotron bølger og elektrostatiske nedrehybrid bølger som to muligheder. Det er kun udbredelse af bølger vinkelret på magnetfeltet, vi vil betragte her, dvs. specielt udbredelsen af ordinære- og ekstraordinære bølger (afsnit 2.4) samt øvrehybrid bølger (afsnit 2.7). Det gælder for disse, at bølgefronten vil kunne koble resonant med enten ioncyklotron bølger eller nedrehybrid bølger via de ponderomotive kræfter, og dermed give anledning

til en væsentlig tæthedsperturbation. Det rumlige Fourier spektrum af bølgefronten indeholder et bredt spektrum af bølgetal. Den lavfrekvente bølge med bølgetallet, som svarer til resonant excitation, vil blive exciteret mest. Hvis ovenikøbet bølgetalspektret har et maximum omkring dette bølgetal, vil excitationen være særlig stærk. Det resonante bølgetal er bestemt af skæringen mellem $\omega/k = V_g$ og $\omega^2 = \Omega^2 + C_S^2 k^2$, hvor Ω enten er Ω_i for ioncyklotron bølger eller Ω_{LH} for nedrehybrid bølger. Da $\Omega_{LH} \gg \Omega_i$, vil excitationen af disse kunne betragtes hver for sig.

I kapitel 6 vil vi i en simpel endimensional model af de her beskrevne effekter forsøge at beregne tæthedsperturbationerne analytisk.

4.3. Tæthedsperturbationernes indvirkning på udbredelsen af højfrekvente bølger

I det foregående afsnit argumenterede vi for, hvorledes bølger i visse tilfælde kunne perturbere plasmaet. Hvis den højfrekvente bølges udbredelse er afhængig af plasmatætheden, vil en eventuel tæthedsændring betyde en modifikation af bølgen. I mange tilfælde er det endda sådan, at den dominerende ulinearitet (se f.eks. Kaw og Nishikawa (1975); Baumgärtel og Zchakaja (1977); Dysthe og Pécseli (1977)) kommer fra den langsomme lokale ændring i plasmatætheden, hvor ændringen skyldes de førnævnte ponderomotive kræfter. Specielt i vores tilfælde, hvor der typisk er tale om et randværdiproblem, dvs. vi har foreskrevet frekvensen af den højfrekvente bølge på randen af plasmaet, kan ændringen af tætheden give anledning til et ulineært bølgetalskift (Pécseli (1981)). Som vi skal se i kapitel 7, kan denne vekselvirkning mellem den højfrekvente bølge og tæthedsændringerne, beskrevet som lavfrekvente bølger, give anledning til en instabilitet kaldet modulationsinstabiliteten (se f.eks. Kadomtsev og Karpman (1971); Thornhill og ter Haar (1978)). I den matematiske beskrivelse af udbredelsen kan vi tage højde for denne tilbagekobling ved at erstatte ω_{pe}^2 med $\omega_{pe}^2(1 + \bar{n}/n_0)$, som vist i afsnittene om de højfrekvente bølger i kapitel 2,

idet kvadratet af plasmafrekvensen ω_{pe} jo netop er et udtryk for tætheden. I den simple endimensionale model som vi benytter, er det muligt at finde, hvad der kan kaldes en "ulinear" dispersionsrelation, der beskriver denne vekselvirkning. Som eksempel vil vi benytte ligningerne (2.52) og (2.62), der beskriver koblingen mellem henholdsvis elektrostatiske øvrehybrid bølger og elektrostatiske ioncyklotron bølger. Lader vi $\psi = ae^{i\theta}$, hvor nu både a og θ er reelle, transformerer disse ligninger til

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v_g \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2} v_g' a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + v_g' a \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial t} + a v_g \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{2} v_g' \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{1}{2} v_g' a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 = - \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{\bar{n}}{n_0} a \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_i^2 - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\bar{n}}{n_0} = \frac{\epsilon_0 k^2}{4Mn_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a^2 - \langle a^2 \rangle) \quad (4.9)$$

Vi betragter nu en perturbation af en plan bølge, dvs.

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 e^{-i(\Omega t - Kx)} \\ \theta &= \theta_1 e^{-i(\Omega t - Kx)} \\ \frac{\bar{n}}{n_0} &= N_1 e^{-i(\Omega t - Kx)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ved indsættelse af (4.10) i ligningerne (4.7) - (4.9), og ved kun at medtage led til 1. orden i de perturberede størrelser, fås

$$\begin{bmatrix} -i(\Omega - KV_g) & -\frac{\kappa^2}{2} v_g' a_0 & 0 \\ \frac{\kappa^2}{2} v_g' & -i(\Omega - KV_g) a_0 & \frac{\omega_{pe}}{2} a_0 \\ \frac{\epsilon_0 k^2}{2n_0 M} a_0 & 0 & (-\Omega^2 + \Omega_i^2 + C_S^2 \kappa^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \theta_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Ved at kræve at determinanten skal være lig nul, fås den søgte dispersionsrelation

$$\begin{aligned} & (-\Omega^2 + \Omega_i^2 + C_S^2 \kappa^2)((\Omega - KV_g)^2 - \frac{\kappa^4}{4} v_g'^2) = \\ & - \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{\epsilon_0 k^2}{4n_0 M} \kappa^4 v_g' a_0^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Betragter vi i stedet vekselvirkningen med ionakustiske bølger eller elektrostatiske nedrehybrid bølger, skal Ω_i^2 blot fjernes, henholdsvis erstattes af Ω_{LH}^2 .

I kapitel 7 vil vi løse ligningerne (2.52) og (2.62) numerisk, og der gøre brug af den fundne dispersionsrelation (4.12) ved fortolkningen af resultaterne.

5. 2.HARMONISKE I FORBINDELSE MED UDBREDELSEN AF EKSTRAORDINÆRE BØLGER

5.1. Analytisk beskrivelse

Som nævnt i afsnit 4.1 er det en vigtig egenskab ved de ekstraordinære bølger, at for en velvalgt frekvens er resonant excitation af 2.harmoniske mulig. For bølgeudbredelse i inhomogene

plasmaer er denne egenskab af særlig betydning, se f.eks. Tewari og Tripathi (1980). Her vil vi se nærmere på, hvad der kan forventes i det mere generelle tilfælde, hvor $(2\omega_0, 2k_0)$ er resonant. Dette er muligt, når den fundamentale bølge (ω_0, k_0) ligger på den langsomme gren, se fig. 2 (bemærk at beskrivelsen af svagt ulineære bølger ved en ulineær Schrödinger ligning bryder sammen, når de harmoniske er resonante eller tæt herpå). I beskrivelsen af den harmoniske generering vil vi benytte den lineære løsning til ligningerne (2.1) - (2.6). Dvs. vi antager, at den fuldstændige løsning kan skrives som $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$, hvor \vec{E}_1 er den lineære løsning, og \vec{E}_2 er løsningen drevet af kvadratiske ulineariteter osv. (n , \vec{v} og \vec{B} opdeles tilsvarende). I denne analyse vil vi negligere kubiske og højere ordens ulineariteter. Ligningen for \vec{E}_2 kan formelt skrives, se (2.17)

$$||D(\omega, \vec{k})|| \cdot \vec{E}_2(\omega, \vec{k}) = \frac{i\omega}{c^2 \epsilon_0} J_{NL}(\omega, \vec{k}) \quad (5.1)$$

hvor den lineære løsning benyttes til bestemmelse af den ulineære strøm J_{NL} . Denne har formen, se (2.16)

$$J_{NL}(\omega, \vec{k}) = \frac{c^2 \epsilon_0}{i\omega} \left[\frac{i\omega}{c^2} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e}{\epsilon_0} n_1(t, \vec{r}) \vec{v}_1(t, \vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dt d\vec{r} \right. \quad (5.2)$$

$$\left. - \frac{\omega^2}{c^2 \omega_{pe}^2} (||I|| - ||\epsilon||) \cdot \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \vec{v}_1(t, \vec{r}) \times \vec{B}_1(t, \vec{r}) - \frac{m}{e} \vec{v}_1(t, \vec{r}) \cdot \nabla \vec{v}_1(t, \vec{r}) \right\} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dt d\vec{r} \right]$$

Denne ulineære strøm er formelt genereret af de "virtuelle excitere" indført af f.eks. Sato, Märk og Popa (1976). Begyndelses- og/eller randbetingelser for (5.1) vil optræde på tilsvarende måde, som det drivende led J_{NL} . Disse betingelser vil give anledning til en overlejring af systemets egenbølger på løsningen, vi giver her, se næste afsnit. I stedet for at finde den

eksakte løsning til (5.1) i det endimensionale tilfælde ($\vec{k} = k\hat{x}$ og $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$) beskrevet i kapitel 3, skal vi her blot medtage polbidragene, som vi i kapitel 3 så gav en tilfredsstillende beskrivelse af hovedsignalet. Bruges den lineære løsning $\vec{E}_1(\omega, k) = \vec{G}(\omega, k) / ((\omega - \omega_0)D(\omega, k))$, hvor $D(\omega, k) = \det ||D(\omega, k)||$, og \vec{G} afhænger af randbetingelser, kan vi reducere (5.2) til

$$\vec{J}_{NL}(\omega, k) = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dx dt \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{C_1} dk_1 d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{C_2} dk_2 d\omega_2 \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\vec{\phi}(\omega, k, \omega_1, k_1, \omega_2, k_2) e^{-i((\omega - \omega_1 - \omega_2)t - (k - k_1 - k_2)x)}}{(\omega_1 - \omega_0)D(\omega_1, k_1)(\omega_2 - \omega_0)D(\omega_2, k_2)}$$

hvor vektoren $\vec{\phi}$ er bestemt ved den lineære løsning. Vi antager, at den fundamentale bølge, dvs. \vec{E}_1 , er påtrykt i $x = 0$ til $t = 0$, og betragter kun bølger, der udbreder sig i den positive x -retning. Ved at antage at denne bølge udbreder sig som en trin-funktion med gruppehastigheden V_g bestemt af ω_0 og k_0 , dvs.

$$\vec{E}_1(t, x) = \vec{E}_1(\omega_0, k_0) e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} h(t - \frac{x}{V_g}) \quad (5.4)$$

kan vi beregne et tilnærmet udtryk for \vec{J}_{NL} , hvor kun polbidrag er medtaget. (I dette tilfælde benytter vi også Laplacetransformation i den rumlige variabel)

$$\vec{J}_{NL}(\omega, k) = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{\vec{\phi}(\omega, k, \omega_1 = \omega_0, k_1 = k_0, \omega_2 = \omega_0, k_2 = k_0)}{\frac{\partial D}{(\frac{\partial}{\partial k})^2}_{\omega_0, k_0}} \quad (5.5)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-i(k - 2k_0)x} \int_{\frac{x}{V_g}}^{+\infty} e^{i(\omega - 2\omega_0)t} dt dx$$

Bemærk $\partial^2 D / \partial k^2$ og højere afledede er blevet negligeret.

Udregnes integralerne fås

$$\vec{J}_{NL}(\omega, k) = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{\vec{\phi}}{\left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)^2_{\omega_0, k_0}} \frac{1}{(\omega - 2\omega_0)(k - 2k_0 - (\omega - 2\omega_0)\frac{1}{v_g})} \quad (5.6)$$

Idet

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = - \frac{\frac{\partial D}{\partial \omega}}{\frac{\partial D}{\partial k}} \quad (5.7)$$

kan (5.6) også skrives som

$$\vec{J}_{NL}(\omega, k) = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{\vec{\phi}}{\left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)_{\omega_0, k_0} (\omega - 2\omega_0) \left[(k - 2k_0) \left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)_{\omega_0, k_0} + (\omega - 2\omega_0) \left(\frac{\partial D}{\partial \omega}\right)_{\omega_0, k_0} \right]} \quad (5.8)$$

Det ses, at udtrykket i den kantede parantes ikke er andet end dispersionsrelationen forskudt til punktet $(2\omega_0, 2k_0)$. Betegnes denne D_2 , og den oprindelige herefter D_1 , har vi

$$D_2(\omega, k) \triangleq D_1(\omega - \omega_0, k - k_0) \quad (5.9)$$

Det elektriske felt drevet af \vec{J}_{NL} kan nu beregnes af

$$\vec{E}_2(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{C_k} \int_{C_\omega} \frac{|D| |adj \cdot \vec{y} e^{-i(\omega t - kx)}}{(\omega - 2\omega_0) D_2(\omega, k) D_1(\omega, k)} d\omega dk \quad (5.10)$$

hvor tensoren $||D||^{adj}$ er den kompleks adjungerede til $||D||$ i ligning (5.1), se også (2.15). Vektoren \vec{Y} er givet ved, se Čadež og Jovanović (1981)

$$\begin{aligned} \vec{Y} = \frac{\vec{\Phi}}{\left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)_{\omega_0, k_0}} &= \left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)_{\omega_0, k_0} \frac{i\omega}{c^2} \left[\frac{e}{\epsilon_0} n_1(\omega_0, k_0) \vec{v}_1(\omega_0, k_0) \right. \\ &+ i \frac{\omega}{\omega_{pe}} (||I|| - ||\epsilon||) \cdot \{ \vec{v}_1(\omega_0, k_0) \times \vec{B}_1(\omega_0, k_0) \\ &\left. - \frac{m}{e} (\vec{v}_1(\omega_0, k_0) \cdot i k_0 \hat{x}) \vec{v}_1(\omega_0, k_0) \} \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

hvor n_1 , \vec{v}_1 og \vec{B}_1 beregnes ved hjælp af (5.4).

Ved først at udføre k -integrationen i (5.10), og kun beholde polbidragene fra nulpunkterne af D_1 og D_2 , samt indføre $\vec{P} = ||D||^{adj} \cdot \vec{Y}$, fås to led

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(t, x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{C_\omega} \frac{\vec{P}(\omega, k_2(\omega)) e^{-i(\omega t - k_2(\omega)x)}}{\left(\frac{\partial D_2}{\partial k}\right)_{k_2(\omega)} D_1(\omega, k_2(\omega)) (\omega - 2\omega_0)} d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{C_\omega} \frac{\vec{P}(\omega, k_1(\omega)) e^{-i(\omega t - k_1(\omega)x)}}{\left(\frac{\partial D_1}{\partial k}\right)_{k_1(\omega)} D_2(\omega, k_1(\omega)) (\omega - 2\omega_0)} d\omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

hvor k_1 og k_2 er defineret ved henholdsvis $D_1(\omega, k_1) = 0$ og $D_2(\omega, k_2) = 0$. Integration mht. ω vil herefter give 4 led, stammende fra polerne, givet ved $\omega = 2\omega_0$, $D_1(\omega, k_2(\omega)) = 0$ og $D_2(\omega, k_1(\omega)) = 0$. Resultatet kan beskrives således:

- i) Polbidraget fra $\omega = 2\omega_0$ i det 1. integrale i (5.12) giver den drevne bølge $(2\omega_0, 2k_0)$

$$\vec{E}_f(t, x) = \frac{\vec{F}(2\omega_0, 2k_0) e^{-i2(\omega_0 t - k_0 x)}}{D_1(2\omega_0, 2k_0) \left(\frac{\partial D_2}{\partial k} \right)_{2\omega_0, 2k_0}} h\left(t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0, k_0}\right) \quad (5.13)$$

som ses at udbrede sig med samme gruppehastighed som den fundamentale bølge. Bemærk at $k_2(2\omega_0) = 2k_0$ i overensstemmelse med definitionen af D_2 .

- ii) Polbidraget fra $\omega = 2\omega_0$ i det andet integrale giver egenbølgen $(2\omega_0, k_1(2\omega_0))$, dvs. en bølge på den hurtige ekstraordinære gren.

$$\vec{E}_e(t, x) = \quad (5.14)$$

$$\frac{\vec{F}(2\omega_0, k_1(2\omega_0)) e^{-i(2\omega_0 t - k_1(2\omega_0) x)}}{D_2(2\omega_0, k_1(2\omega_0)) \left(\frac{\partial D_1}{\partial k} \right)_{2\omega_0, k_1(2\omega_0)}} h\left(t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{2\omega_0, k_1(2\omega_0)}\right)$$

hvor indhylningen ses at udbrede sig med gruppehastigheden $V_{ge} = (d\omega/dk)_{2\omega_0, k_1(2\omega_0)}$.

- iii) Endelig bemærker vi, at polerne, givet ved $D_1(\omega, k_2(\omega)) = 0$ og $D_2(\omega, k_1(\omega)) = 0$, er identiske, og svarer til skæringen (ω_x, k_x) mellem den hurtige og den forskudte langsomme dispersionsgren, se fig. 2 side 41.

$$\vec{E}_x(t, x) =$$

(5.15)

$$\frac{F(\omega_x, k_x) e^{-i(\omega_x t - k_x x)}}{\left(\frac{\partial D_1}{\partial k} \right)_{\omega_x, k_x} \left(\frac{\partial D_2}{\partial k} \right)_{\omega_x, k_x} (\omega_x - 2\omega_0) \left[\left(\frac{dk_1}{d\omega} \right)_{\omega_x, k_x} - \left(\frac{dk_2}{d\omega} \right)_{\omega_x, k_x} \right]} \\ \left[h\left(t - x \left(\frac{dk_2}{d\omega} \right)_{\omega_x, k_x}\right) - h\left(t - x \left(\frac{dk_1}{d\omega} \right)_{\omega_x, k_x}\right) \right]$$

Denne bølge har form som en puls, hvis forende bevæger sig med hastigheden $1/(dk_2/d\omega)_{\omega_x, k_x} \approx (d\omega/dk)_{2\omega_0, k(2\omega_0)}$ og hvis bagende bevæger sig med hastigheden $1/(dk_1/d\omega)_{\omega_x, k_x} \approx (d\omega/dk)_{\omega_0, k_0}$. Bemærk endvidere, at der ikke vil optræde singulariteter i løsningen (5.15): hvis $\omega_x = 2\omega_0$, er der tale om en resonant excitation af de harmoniske, hvilket ikke er inkluderet i analysen; hvis $(dk_1/d\omega)_{\omega_x, k_x} = (dk_2/d\omega)_{\omega_x, k_x}$ svarende til at de to dispersionsgrene er parallelle, eksisterer løsningen ikke.

Bemærk, at for en given fasehastighed ω/k er gruppehastigheden af den hurtige ekstraordinære bølge altid større end den af den tilsvarende langsomme bølge. Det betyder, hvad vi allerede har antydnet under iii), at $(dk/d\omega)_{\omega_0, k_0}$ i (5.13) er større end $(dk/d\omega)_{2\omega_0, k_1(2\omega_0)}$ i (5.14). En rækkeudvikling af (5.13) og (5.14) i det tilfælde, hvor $(2\omega_0, 2k_0)$ er tæt på resonans, viser, at amplituderne af disse bølger er næsten identiske. Den tredje bølge (5.15) vil have en amplitude af samme størrelsesorden, idet differencen mellem gruppehastighederne kræves stor for at opfylde antagelserne, der er benyttet ved udledelsen. Med andre ord denne beskrivelse er kun anvendelig, hvis bølgefronterne rumligt er langt fra hinanden. I fig. 3 er udbredelsen af de tre bølger skitseret.

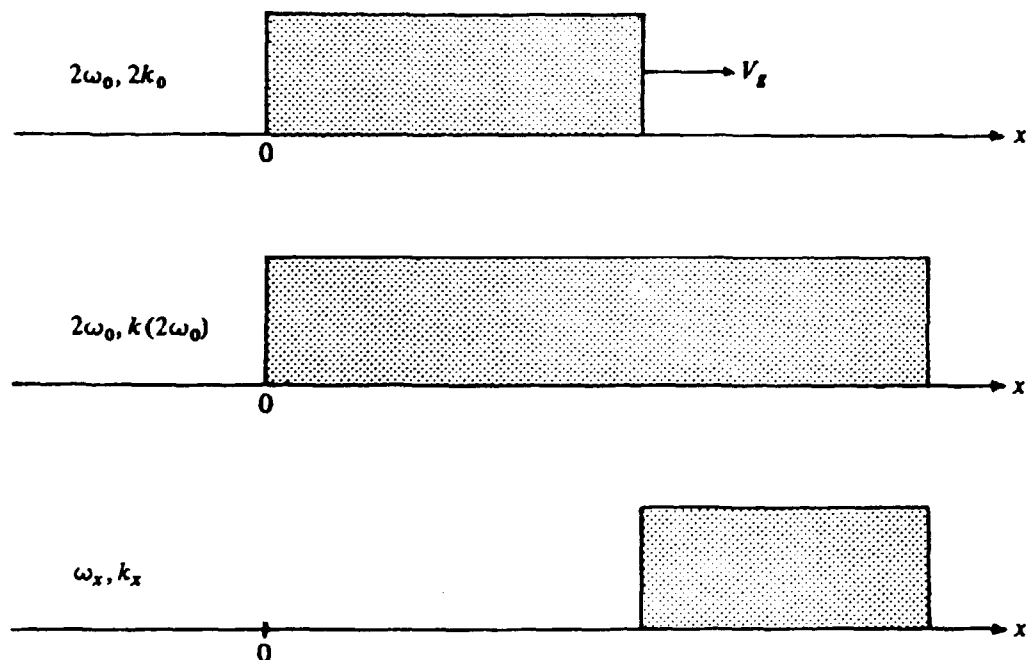


Fig. 3. Skematisk tegning er af de tre ulineært genererede harmoniske bølger. Øverst er vist den drevne bølge $(2\omega_0, 2k_0)$, i midten egenbølgen $(2\omega_0, k(2\omega_0))$ og nederst "skæringsbølgen" (ω_x, k_x) .

Endelig understreges det, at vi kun har betragtet bølger, som kan/vil blive exciteret til relativt store amplituder, derfor er f.eks. den baglæns løbende bølge $(\omega_0, -k(2\omega_0))$ ikke behandlet (se også appendiks D). Bølgen $(\omega(2k_0), 2k_0)$ optrådte heller ikke i denne analyse. Betingelserne for dennes tilstedeværelse vil blive behandlet i næste afsnit og appendiks D.

5.2 Diskussion af den analytiske løsning

I forrige afsnit betragtede vi udbredelsen af en langsom ekstraordinær bølge (ω_0, k_0) og fandt den gav anledning til den drevne bølge $(2\omega_0, 2k_0)$, som drev egenbølgen $(2\omega_0, k(2\omega_0))$ og en "skæringsbølge" (ω_x, k_x) . Da egenbølgen generelt har en større gruppehastighed end den fundamentale bølges gruppehastighed, vil den optræde som en ulinear forløber. "Skæringsbølgen" eksisterer kun som forløber, se fig. 3. Når amplituderne af disse tre bølger er sammenlignelige (dette er muligt, når $(2\omega_0, 2k_0)$ ikke er for langt fra at opfylde dispersionsrelationen for den hurtige ekstraordinære bølge), vil interferensen mellem disse bølger være vigtig. Det er dog vigtigt at notere sig, at disse bølger kun optræder to og to på et givet sted til et givet tidspunkt. For eksempel bag fronten af den fundamentale bølge vil interferensen mellem bølgerne $(2\omega_0, 2k_0)$ og $(2\omega_0, k(2\omega_0))$ give \vec{E}_2 en stationær indhylning. For fuldstændighedens skyld skal det nævnes, at de ponderomotive kræfter, der er forbundet med interferensen mellem de harmoniske, vil naturligvis også perturbere plasmatætheden. Men vi har i dette arbejde ignoreret denne perturbation, da den er meget mindre end den, der er forbundet med udbredelsen af den fundamentale bølge.

Ved udledningen af de harmoniske i forrige afsnit, antog vi, at fronterne af bølgerne var givet ved stepfunktioner. Medens egenbølgen $(2\omega_0, k(2\omega_0))$ antagelig er ufølsom overfor denne antagelse (Sato m.fl. (1976)), forventer vi at en mere realistisk beskrivelse af bølgefronterne vil have indflydelse på "skæringsbølgen". Analysen viste også randenes betydning i plasmaet ved genereringen af harmoniske. Betragt f.eks. en plan bølge (ω, k) af uendelig udstrækning i et system, hvor der ikke findes specielle punkter (excitere, bølgefronter osv.). Ved at skifte fra et koordinatsystem til et som bevæger sig med hastigheden W , vil bølgen i dette koordinatsystem være beskrevet ved $(\omega + kW, k)$. Betragt dernæst genereringen af harmoniske. Ved at betragte hvert tidspunkt som et nyt begyndelsesværdiproblem (se forrige afsnit og appendiks D), vil egenbølgen givet ved $(\omega(2k) + 2kW, 2k)$ blive genereret, og denne transformerer rigtigt med W , dvs. den er uafhængig af koordinatsystemet. Ved i stedet at betragte hvert

punkt i rummet som "virtuelle exciterer" (Sato m.fl. (1976)) finder vi egenbølgen $(2\omega+2k\omega, k(2\omega+2k\omega))$. Skifter vi tilbage til det oprindelige koordinatsystem, ses det, at vi får det uacceptable resultat, at løsningen afhænger af ω . Vi konkluderer derfor, at denne egenbølge ikke vil blive exciteret i dette tilfælde. Kun ved tilstedeværelsen af rande i plasmaet (i vores tilfælde $x = 0$ og de udbredende bølgefronter) findes der foretrukne referencesystemer, der definerer excitationen af harmoniske.

Artiklen af Sato m.fl. (1976) omhandler et lignende tilfælde. De betragter et plasma, hvori der er anbragt en exciter, som producerer den fundamentale bølge (ω, k) , og hvor plasmaets ulineariteter giver anledning til den drevne bølge $(2\omega, 2k)$. Et naturligt valg af randbetingelser i denne situation er kravet om, at amplituden af oscillationer med frekvensen 2ω er forsvindende ved exciteren. Egenbølgen $(2\omega, k(2\omega))$'s rolle er helt at modsvare den drevne bølge $(2\omega, 2k)$ på dette sted. I vores tilfælde skulle der i ligning (5.1) være medtaget randværdiled for at opfylde en sådan randbetingelse eksakt. Ved et andet valg af randbetingelse er det tilsvarende klart, at det er muligt helt at udslukke bølgen $(2\omega, k(2\omega))$. "Skæringsbølgen", vi fandt i forrige afsnit, kan fortolkes som det signal, der udslukker den drevne bølge $(2\omega, 2k)$ i $x = 0$, mens der "skrues op" for den fundamentale bølge, dvs. mens den afviger fra en ren harmonisk oscillation. Når den fundamentale bølge har fået sin fulde amplitude, har denne særlige egenbølge udspillet sin rolle, og forlader randen $x = 0$ som en bølgepakke af endelig udstrækning. Ved hjælp af disse argumenter er det let at forklare kvalitativt "skæringsbølgens" udbredelse for mere realistiske betingelser, end de ved ligning (3.9) givne. I begyndelsesværdiproblemet vi diskuterede før, bliver egenbølgen $(\omega(2k), 2k)$ altså exciteret for at udslukke den drevne bølge $(2\omega, 2k)$ til $t = 0$. Ligeledes er det nu let at forklare tilstedeværelsen af de forskellige harmoniske i et blandet begyndelses- og randværdiproblem, som det i appendiks D.

6. DREVNE LAVFREKVENTE ELEKTROSTATISKE BØLGER

6.1. Generel løsning til de inhomogene lavfrekvente bølgeligninger

I afsnit 4.2 argumenterede vi for at de ponderomotive kræfter, der er forbundet med fronten af en indtrængende højfrekvent bølge, vil perturbere plasmatætheden, og at denne perturbation kunne beskrives enten som drevne ionakustiske-, ioncyklotron- eller nedrehybrid bølger. Endvidere argumenterede vi for hvilke af disse, der er aktuelle for de forskellige højfrekvente bølgetyper, vi eksplicit har valgt at analysere udbredelsen af. I en analytisk beskrivelse af denne proces vil vi simplificere problemet ved at benytte en endimensional beskrivelse. Lader vi $F(t,x)$ betegne de ponderomotive kræfter (se afsnit 4.2), kan excitationen af de 3 førnævnte lavfrekvente bølgetyper (se afsnittene 2.9, 2.10 og 2.11) beskrives ved følgende inhomogene ligning

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} + \Omega^2 \frac{\bar{n}}{n_0} - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\bar{n}}{n_0} = - \frac{1}{n_0 M} \frac{\partial}{\partial x} F \quad (6.1)$$

hvor

$$\Omega^2 = \begin{cases} 0 & \text{for ionakustiske bølger} \\ \Omega_1^2 & \text{for ioncyklotron bølger} \\ \Omega_{LH}^2 & \text{for nedrehybrid bølger} \end{cases} \quad (6.2)$$

Vi vil nu betragte situationen, hvor en højfrekvent bølge til $t = 0$ trænger ind i et uperturberet ($\bar{n}/n_0 = 0$), halvuendeligt ($x > 0$) plasma. Det er muligt, under disse betingelser at give en generel analytisk løsning til (6.1) v.hj.a. Green's funktion, der er bestemt ved

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega^2 - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(t, x) = \delta(x) \delta(t) \quad (6.3)$$

Ligning (6.3) kan løses ved at benytte Fouriertransformation i x og Laplacetransformation i t . Resultatet er

$$G(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2C_s} h(t - \frac{|x|}{C_s}) & , \quad \Omega = 0 \\ \frac{1}{2C_s} J_0\left(\frac{\Omega}{C_s} (C_s^2 t^2 - x^2)^{1/2}\right) h(t - \frac{|x|}{C_s}) & , \quad \Omega \neq 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Det ses her, at tilfældet $\Omega = 0$ også er inkluderet i det andet udtryk for G . Her vil vi dog, for at understrege forskellen mellem de dispersive bølger ($\Omega \neq 0$) og de ikke-dispersive ion-akustiske bølger ($\Omega = 0$), behandle de to tilfælde separat.

I tilfældet $\Omega = 0$ bliver løsningen til (6.1) med de givne begyndelsesbetingelser herefter

$$\begin{aligned} \frac{\bar{n}}{n_0} = & \\ & - \frac{1}{2C_s n_0 M} \int_0^t \int_{x-C_s(t-t')}^{x+C_s(t-t')} \frac{\partial}{\partial x'} P(t', x') dx' dt', \quad t > 0 \quad x > 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

og i tilfældet $\Omega \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{n}}{n_0} = & \\ & - \frac{1}{2C_s n_0 M} \int_0^t \int_{x-C_s(t-t')}^{x+C_s(t-t')} J_0\left(\frac{\Omega}{C_s} (C_s^2 (t-t')^2 - (x-x')^2)^{1/2}\right) \\ & \frac{\partial}{\partial x'} P(t', x') dx' dt', \quad t > 0 \quad x > 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

En sammenligning af (6.5) og (6.6) viser, at der er en markant forskel på tæthedssvaret alt afhængig af, om der exciteres dispersive eller ikke-dispersive lavfrekvente bølger. I det dispersive tilfælde forventes det pga. Besselfunktionen J_0 , at svaret har en oscillerende karakter. Svaret i det ikke-dispersive tilfælde forventes at være nært knyttet til formen af det ponderomotive potentiale Ψ , $F = -\partial\Psi/\partial x$. Vi vil se nærmere på dette i det følgende afsnit.

6.2. Indflydelsen af den højfrekvente bølgefronts form og hastighed på tæthedssvaret

Fasen af svaret fra en oscillator er afhængig af, om oscillatoren drives over (svaret i modfase) eller under (svaret i fase) dennes resonansfrekvens. I analogi med dette må tæthedssvaret afhænge af, om bølgefronten bevæger sig med en gruppehastighed V_g , der er større end eller mindre end lydhastigheden C_s . I det specielle tilfælde, hvor V_g netop er lig C_s , er der tale om en resonant excitation, og en eventuel tæthedsperturbation forventes at vokse lineært med tiden (se f.eks. (6.10)). Vi vil dog koncentrere os om det mere generelle tilfælde, hvor $V_g \neq C_s$. Afhængigheden af V_g kan i en første tilnærmelse undersøges ved at negligere tidsvariationen af bølgefronten i et referencesystem, der bevæger sig med hastigheden V_g (Dysthe m.fl. (1978)). Denne antagelse medfører, at det ponderomotive potentiale Ψ , der er forbundet med bølgefronten, kan skrives på formen

$$\Psi(t, x) = \Psi(x - V_g t) \quad (6.7)$$

Først vil vi undersøge det tilfælde, hvor tæthedsperturbationerne er beskrevet som drevne ionakustiske bølger. For i første omgang at undgå randeffekter betragter vi problemet, hvor den højfrekvente bølge tænkes at starte i $x = 0$ til $t = 0$ i et uendeligt plasma. Antages det, at bølgen udbreder sig i den positive x -retning, vil en deraf følgende tæthedsperturbation også være givet ved (6.5).

Indsættes (6.7) i (6.5) får vi

$$\frac{\bar{n}}{n_0} = - \frac{1}{2C_S n_0 M} \int_0^t \int_{x-C_S(t-t')}^{x+C_S(t-t')} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \Psi(x'-V_g t') dx' dt', \quad t > 0 \quad (6.8)$$

Benyttes koordinattransformationen

$$\theta' = x' + \frac{t'}{V_g} \quad (6.9)$$

$$\rho' = x' - V_g t'$$

kan (6.8) reduceres til (Scott (1982))

$$\frac{\bar{n}}{n_0} = \begin{cases} \frac{1}{n_0 M} \left[-\frac{t}{2C_S} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x-C_S t) - \frac{1}{4C_S^2} \Psi(x-C_S t) + \frac{1}{4C_S^2} \Psi(x+C_S t) \right] \\ \quad , \quad V_g = C_S \quad , \quad t > 0 \\ \\ \frac{1}{n_0 M} \left[\frac{\Psi(x-V_g t)}{V_g^2 - C_S^2} - \frac{\Psi(x-C_S t)}{2C_S(V_g - C_S)} + \frac{\Psi(x+C_S t)}{2C_S(V_g + C_S)} \right] \\ \quad , \quad V_g \neq C_S \quad , \quad t > 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Da funktionen Ψ har en endelig udstrækning (se afsnit 4.2), ses løsningen at bestå af 3 bidrag, der bevæger sig væk fra $x = 0$ med hver sin hastighed. Det første led beskriver en perturbation, der flytter sig med hastigheden V_g og følger derfor med bølgefronten. Dette svar er som forventet i modfase for $V_g < C_S$ og i medfase for $V_g > C_S$ (operatoren $\partial^2/\partial x^2$ giver en fasedrejning på 180°). De to andre pulser bevæger sig henholdsvis med

hastigheden C_s og $-C_s$. Disse beskriver, hvorledes plasmaet kompenserer for et eventuelt overskud/underskud af tæthed skabt af bølgefronten, således at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{n}}{n_0} dx = 0 \quad .$$

Disse to bidrag kaldes normalt fri ionlyd. Matematisk set beskriver de blot den homogene løsning til (6.1), der er nødvendig for at opfylde begyndelsesbetingelserne til $t = 0$. Det er iøvrigt vigtigt at lægge mærke til, at pulserne vil være helt adskilt rumligt for store t , afhængig af hvor stor forskellen er mellem V_g og C_s . For fuldstændighedens skyld er løsningen for $V_g = C_s$ medtaget i (6.10). Vender vi nu tilbage til situationen, beskrevet i afsnit 6.1, forventer vi et lignende resultat under antagelsen $\Psi = \Psi(x-V_g t)$. Indførelsen af randen af det halvuen-delige plasma vil dog bevirke, at den homogene del af løsningen må modificeres tilsvarende. For store t og $V_g > C_s$ vil vi altså forvente at se en tæthedsperturbation, givet ved det første led i (6.10), der følger med bølgefronten efterfulgt af, men langt bagude, fri ionlyd. I tilfældet $V_g < C_s$ vil vi forvente at opleve en forløber $\Psi(x-C_s t)$ og derefter tæthedsperturbationen, der følger med bølgefronten. Vi tillader nu, at bølgefronten langsomt ændrer form under udbredelsen. Det vil sige $\Psi =$

$\Psi(x-V_g t, \epsilon t)$, hvor ϵ er en lille parameter, der karakteriserer den langsomme tidsvariation i referencesystemet, der bevæger sig med hastigheden V_g . Da forventer vi i overensstemmelse med løsningen (6.10), at tæthedsperturbationen, der følger med bølgefronten, ændrer form, og at ændringen ledsages af en udstråling af ionlyd (betragt hvert tidspunkt som et nyt begyndelsesværdiproblem).

Vi betragter nu tilfældet, hvor tæthedsperturbationerne antages beskrevet ved enten ioncyklotron bølger eller nedrehybrid bølger. Det vil i princippet være muligt at gennemføre en tilsvarende analyse for disse dispersive bølger ved at benytte løsningen (6.6) i stedet for (6.5). Det er dog vigtigt at gøre sig klart, hvad det betyder for tæthedssvaret, at det er beskrevet ved dispersive bølger. I modsætning til før, hvor den

frie ionlyd (den homogene løsning til (6.1) med $\Omega = 0$) var tvunget til at bevæge sig med hastigheden C_s , er alle gruppehastigheder mindre end C_s nu tilladte for perturbationer, der er beskrevet ved den homogene løsning til (6.1) med $\Omega \neq 0$. Dette afspejler sig i, at integralet (6.6) ikke er helt let at løse selv under antagelsen (6.7). Det er dog muligt at finde en inhomogen løsning ved at benytte antagelsen (6.7), og antage at \bar{n}/n_0 også kun afhænger af $\rho = x - V_g t$. Ligning (6.1) transformeres da til en inhomogen, ordinær 2. ordens differentialligning, som er givet ved

$$\frac{d^2}{d\rho^2} z \pm P^2 z = f(\rho) \quad , \quad V_g \neq C_s \quad (6.11)$$

hvor vi har indført $z = \bar{n}/n_0 - \bar{v}/n_0 M(V_g^2 - C_s^2)$, $P^2 = \Omega^2 / |V_g^2 - C_s^2|$ og $f(\rho) = -(\bar{v}/n_0 M)(\Omega / (V_g^2 - C_s^2))^2$. Plustegnet bruges, hvis $V_g > C_s$ og minustegnet, hvis $V_g < C_s$. En inhomogen løsning til (6.11) kan konstrueres udfra de homogene løsninger (se f.eks. Elbrønd Jensen (1974)). Da de homogene løsninger for $V_g > C_s$ er $z_1 = \sin(P\rho)$ og $z_2 = \cos(P\rho)$, medens de for $V_g < C_s$ er $z_1 = e^{P\rho}$ og $z_2 = e^{-P\rho}$, er det klart, at vi må forvente væsentlige forskellige tæthedssvar i de to tilfælde.

Ser vi først på tilfældet $V_g > C_s$. En inhomogen løsning z_{in} til ligning (6.1) er da givet ved

$$z_{in} = \frac{1}{P} \int f(\rho') \sin(P(\rho - \rho')) d\rho' \quad (6.12)$$

Ved at indføre de oprindelige størrelser og bruge passende grænser på integralet, fås endelig

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{n}}{n_0} \right)_{in} = & \frac{1}{n_0 M} \frac{1}{V_g^2 - C_s^2} \left[\bar{v}(\rho) + \frac{\Omega}{\sqrt{V_g^2 - C_s^2}} \int_{\rho}^{+\infty} \bar{v}(\rho') \sin\left(\frac{\Omega}{\sqrt{V_g^2 - C_s^2}}(\rho - \rho')\right) d\rho' \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

For at opfylde betingelsen $\bar{n}/n_0 = 0$ for $t = 0$ må løsningen (6.13) naturligvis suppleres med en homogen løsning til (6.1), som opvejer den inhomogene løsning (6.13) for $t = 0$. For $V_g \gg C_s$ vil løsningen (6.13) fjerne sig rumligt fra de homogene løsninger, da disse højst kan udbrede sig med hastigheden C_s . For store t vil disse derfor kun modificere løsningen (6.13) langt bag bølgefronten. Vi bemærker endvidere, hvis V_g/Ω ($V_g \gg C_s$) er meget mindre eller meget større end skalalængden L for variationen i Ψ , vil integranden i (6.13) give et lille bidrag. Bidrager integralet i (6.13) væsentligt, er det derfor muligt at konkludere, at bølgefronten efterfølges af en lavfrekvent bølge med et bølgetal $K = \Omega/V_g$ overlejret af et bidrag $\sim \Psi$. I fig. 4 er vist en numerisk løsning af ligning (6.1), hvor vi ved beregningen af F har benyttet det asymptotiske udtryk for bølgefronten (ligningerne (3.18) - (3.22)), vi fandt i afsnit 3.2 (Jovanović m.fl. (1982)). Det ses, at det numeriske resultat er i overensstemmelse med de førnævnte betragtninger.

For fuldstændighedens skyld skal vi også betragte tilfældet $V_g < C_s$. I dette tilfælde er en inhomogen løsning til ligning (6.11) givet ved

$$z_{in} = \frac{1}{2P} \int f(\rho') e^{P(\rho - \rho')} d\rho' - \frac{1}{2P} \int f(\rho') e^{-P(\rho - \rho')} d\rho' \quad (6.14)$$

Her er det lidt problematisk at finde acceptable grænser på integralerne. I tilfælde, hvor en isoleret løsning ($\bar{n}/n_0 = 0$ for $\rho = \pm\infty$) er aktuel, kan den inhomogene løsning skrives som (Dysthe m.fl. (1978))

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{n}}{n_0} \right)_{in} = & \frac{1}{n_0 M} \frac{1}{C_s^2 - V_g^2} \left[-\Psi(\rho) + \frac{\Omega}{2\sqrt{C_s^2 - V_g^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\rho') \exp\left(-\frac{\Omega}{\sqrt{C_s^2 - V_g^2}} |\rho - \rho'| \right) d\rho' \right] \end{aligned} \quad (6.15)$$

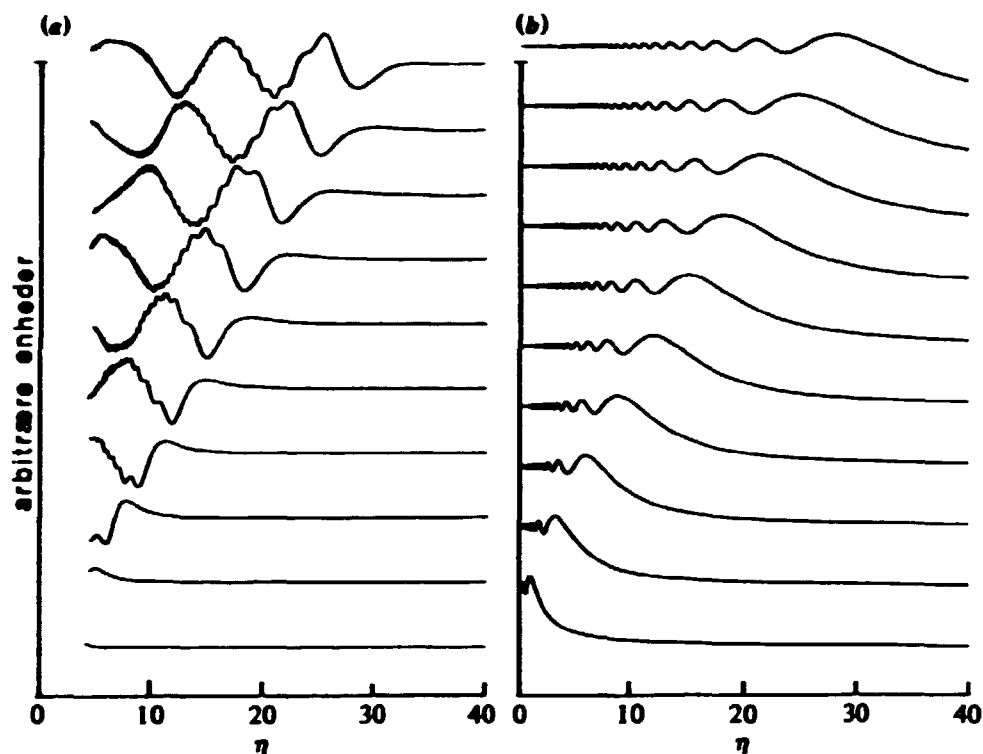


Fig. 4. (a) \bar{n}/n_0 som funktion af $\eta = \omega_0 x/c$, beregnet ved en numerisk løsning af ligning (6.1). Tidsforskellen mellem hver kurve er $6/\omega_0$. (b) Bølgefronten $B(\nu)$ fra ligning (3.18). $B(\nu)$ er brugt ved beregningen af den ponderomotive kraft P i ligning (6.1) og vist for de til (a) svarende tidspunkter. Ved beregningen er det antaget at $P = 0.75$, $C_s/c = 0.2$ og $\Omega/\omega_0 = 0.4$. De hurtige variationer i $B(\nu)$ nær $\eta = 0$ for små tider er dog blevet negligeret i beregningen af P .

I vores tilfælde er det nok for stærkt et krav at kræve $\bar{n}/n_0 = 0$ for $\rho = -\infty$. Ved den numeriske løsning i kapitel 7 vil vi benytte $(\partial^2(\bar{n}/n_0)/\partial x^2)_{x=0} = 0$, men at indføre denne randbetingungelse er ikke så ligetil. Da vi alligevel betragter tilfældet $V_g > C_s$ som det vigtigste, vil vi her kun gøre opmærksom på, at den inhomogene løsning (6.14) kan give løsninger, hvor $z_{in} \rightarrow \infty$, hvis den benyttes ukritisk.

7. NUMERISK UNDERSØGELSE AF UDBREDELSEN AF HØJFREKVENTE BØLGER

7.1. Modelligninger

I dette kapitel vil vi numerisk prøve at studere effekterne af ulineariteterne beskrevet i afsnittene 4.2 og 4.3. Som eksempel vil vi eksplicit løse de koblede ligninger, der beskriver udbredelsen af en højfrekvent elektrostatisk øvrehybrid bølge (se afsnit 2.7) og dennes kobling til lavfrekvente elektrostatiske ioncyklotron bølger (se afsnit 2.9). Ligesom ved den analytiske beskrivelse betragtes her den simple endimensionale model, der er beskrevet ved ligningerne (2.52) og (2.66). Det er bekvemt at benytte følgende normaliseringer:

$$N = \frac{\bar{n}}{n_0} ; \quad E = \frac{kT}{(4n_0 M C_s^2 / \epsilon_0)^{1/2}} ;$$

$$v = v_g / C_s ; \quad v' = v_g' \Omega_i / C_s^2 ; \quad (7.1)$$

$$x = \tilde{x} \Omega_i / C_s ; \quad t = \tilde{t} \Omega_i ; \quad Q = \frac{1}{2} \omega_{pe} / \Omega_i ;$$

Indsættes disse dimensionløse størrelser i ligningerne (2.52) og (2.66) fås

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) E + \frac{1}{2} v' \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = Q N E \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) N = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (|E|^2 - \langle |E|^2 \rangle) \quad (7.3)$$

Det er disse koblede, ulineære partielle differentialligninger, vi vil løse numerisk for $x > 0$, $t > 0$ med følgende betingelser givet

$$\operatorname{Re}(E(t, x = 0)) = \begin{cases} \frac{E_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T_r}\right)\right) & , 0 < t < T_r \\ E_0 & , t > T_r \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\operatorname{Im}(E(t, x=0)) = 0 \quad , t > 0 \quad (7.5)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_{x=L}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_{x=L}\right) = 0 \quad , t > 0 \quad (7.6)$$

$$\operatorname{Re}(E(t=0, x)) = \operatorname{Im}(E(t=0, x)) = 0 \quad , 0 < x < L \quad (7.7)$$

$$N(t=0, x) = 0, \frac{\partial}{\partial t} N \Big|_{t=0} = 0 \quad , 0 < x < L \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad , t > 0 \quad (7.9)$$

Rand- og begyndelsesbetingelserne (7.4) - (7.9) svarer til, at vi betragter et plasma (\sim halvuendeligt for L stor), der til $t = 0$ er uden tæthedsvariationer. Til $t > 0$ påtrykkes på randen $x = 0$ en højfrekvent bølge, der er beskrevet ved dens indhylning E . Stigtiden T_r angiver, hvornår amplituden af bølgen når sin slutværdi E_0 på randen. Da det er umuligt at betragte et uendeligt system på en regnemaskine, er det nødvendigt at betragte et plasma af endelig udstrækning, beskrevet ved længden L . Randbetingelserne (7.6) og (7.9) har vist sig at være de bedste i et forsøg på at indføre en rand i $x = L$, der giver de mindste reflektioner. Bemærk vi også bruger denne randbetingelse for N i $x = 0$.

7.2 Løsningsmetode og stabilitet

Metoden, vi vil benytte ved den numeriske løsning, er blevet brugt ved løsning af den ulineære Schrödinger ligning (Yajima m.fl. (1975)). Ved at dele E op i real- og imaginærdel, $E = E_r + iE_i$, splitter ligning (7.2) op i to ligninger, der beskriver tidsudviklingen af henholdsvis E_r og E_i . Alle de partielle afledede erstattes derefter med centrale differensstilnærmelser (opløsningen i t og x benævnes Δt henholdsvis Δx). Resultatet bliver en simpel differensstilnærmelse til ligningssystemet (7.2) - (7.3), se app. E for detaljer. Det er nu en relativ simpel sag numerisk at finde tidsudviklingen af E_r , E_i og N ved hjælp af dette differensskema og de givne rand- og begyndelsesbetingelser (7.4) - (7.9). Ved at beregne modulus $|E| = (E_r^2 + E_i^2)^{1/2}$ og argument $\theta = \text{"Arctg"}(E_i/E_r)$, og afbilde N , $|E|$ og θ som funktion af x for udvalgte tider, får vi figurer som fig. 6 - 9, siderne 70 - 71. Det skal bemærkes, at "Arctg" står for funktionen ATAN2 (en procedure i Fortran), hvis funktionsværdier ligger i $[-\pi, \pi]$.

Det er egentlig forbavsende, at denne simple metode er anvendelig i dette tilfælde, da en lineær stabilitetsanalyse, som vi nu skal se på (Yajima m.fl. (1975)), viser at differensskemaet højst kan være marginalt stabilt. Ved at Fouriertransformere det lineariserede differensskema i x er det muligt at finde en overføringsmatrice $||T||$ (se app. E for detaljer), hvis komplekse egenverdier λ_i angiver skemaets stabilitet. Skemaet er stabilt hvis alle $|\lambda_i| < 1$, marginalt stabilt hvis en eller flere opfylder $|\lambda_i| = 1$, og ustabil hvis bare en opfylder $|\lambda_i| > 1$. Her skal vi for at bestemme λ_i , løse en 6. grads ligning, se ligning (E.15). I fig. 5 er vist en numerisk løsning af ligning (E.15) for varierende Δt , med værdier for de andre parametre svarende til løsningen vist i fig. 7. For hvert Δt findes den løsning, der har det største $|\lambda_i|$, idet egenverdierne også er afhængige af, hvilke Fourierkomponenter der beregnes for. Det er disse løsninger, der er vist ved krydser i det komplekse λ -plan, i fig. 5. Det ses, at skemaet højst kan være marginalt stabilt, medens det, som i dette tilfælde, for $\Delta x = 2$ bliver ustabil for $\Delta t > 0.2$.

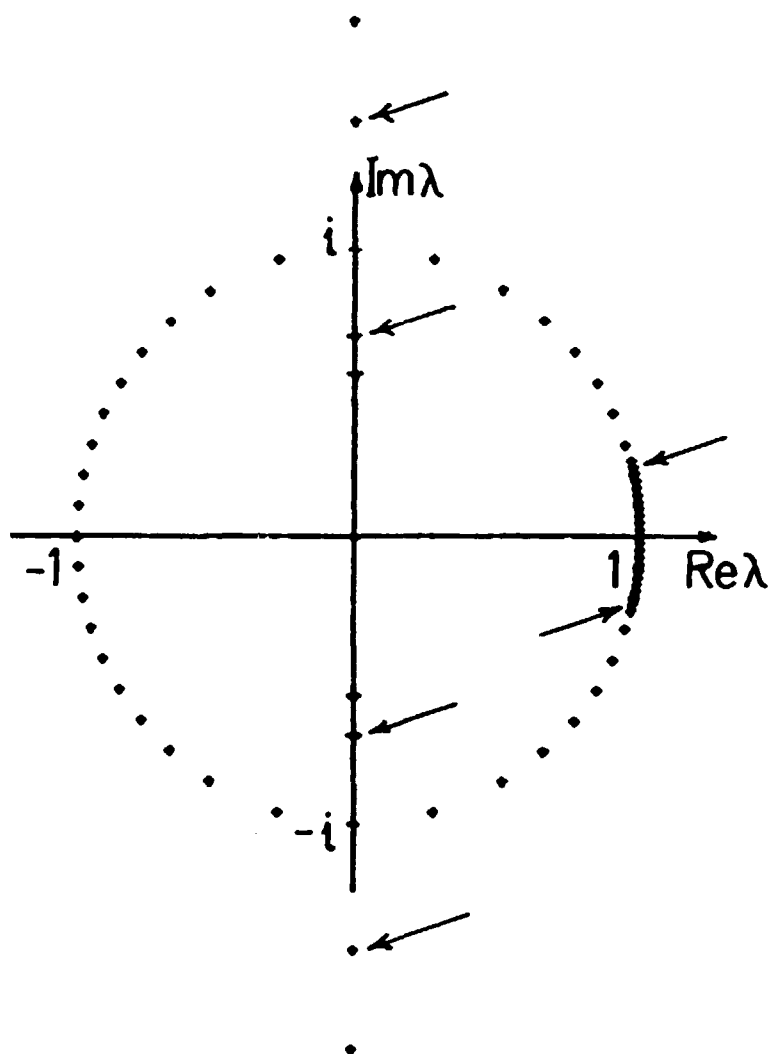


Fig. 5. Numeriske løsninger af ligning (E.15) i app. E for parametre svarende til løsningen vist i fig. 7. Figuren viser for hvert tidsskridt Δt de seks komplekse rødder λ_i , hørende til løsningen med det største $|\lambda_i|$. Denne løsning er fundet ved at variere bølgetallet K (se app. E). Tidsskridtet Δt er øget med 0.02 mellem hver vist løsning. Løsningen indikeret med pile svarer til $\Delta t = 0.2$.

Det har dog vist sig, at ulineariteterne tilsyneladende ikke gør skemaet ustabil i det marginalt stabile tilfælde. Det samme var tilfældet i arbejderne af Yajima m.fl. (1975), Rypdal m.fl. (1982) og Pécseli m.fl. (1983).

7.3. Numeriske resultater for $v^2 \gg 1$ ($v_g^2 \gg c_s^2$)

Indsættelse af fysiske realistiske værdier for parametrene i ligningerne (7.2) og (7.3) medfører, at den her valgte numeriske metode vil være meget tidskrævende. I stedet har vi valgt at demonstrere de grundlæggende egenskaber ved ligningerne ved valg af parametre, der ligger indenfor vores regnekapacitet. Vi vil især koncentrere os om tilfældet $v^2 \gg 1$ ($v_g^2 \gg c_s^2$). Figurerne 6 - 9 viser karakteristiske resultater. Det har vist sig, at løsningernes form var meget afhængige af parametrene E_0 , v' og T_r , medens formen var mindre afhængig af v og Q , så længe $v^2 \gg 1$, se iøvrigt app. F, hvor vi har medtaget flere figurer.

I overensstemmelse med hvad vi har fundet analytisk i det foregående, ses det karakteristiske forløb ved udbredelsen af bølgefronten at være følgende:

- i) I tilfældet uden tilbagekobling, $Q = 0$, (se app. F) optræder der dispersive oscillationer i modulus af indhylningen til den udbredende bølge, medens fasen ændrer sig hurtigst i fronten af bølgefronten. Dette er i fuld overensstemmelse med det analytiske resultat, vi fandt i kapitel 3, se f.eks. fig. 1 side 33. I tilfælde med tilbagekobling, som i figurerne 6 - 9, genfinder vi denne udvikling for små t .
- ii) Bag bølgefronten observeres dannelsen af lavfrekvente tæthedsperturbationer med en karakteristisk bølgelængde $K \sim 1/v$. I kapitel 6 fandt vi en inhomogen løsning (6.13) til (7.3), der var brugbar, hvis $v \gg 1$, og tilbagekoblingen negligeres. Indføres normaliseringerne (7.1) er denne løsning givet ved

$$N = \frac{1}{v^2 - 1} \left[F(\rho, \epsilon t) + \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} \int_0^{+\infty} F(\rho', \epsilon t) \sin\left(\frac{(\rho - \rho')}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) d\rho' \right] \quad (7.10)$$

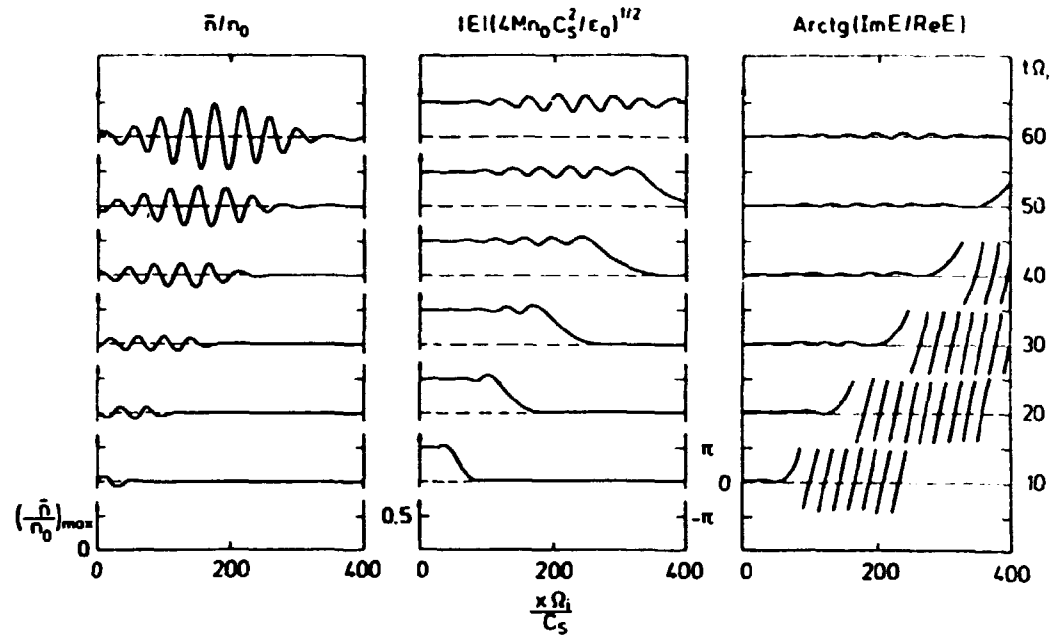


Fig. 6. Den lavfrekvente tæthedsperturbation, modulus og argument af den komplekse indhylning af den højfrekvente bølgefront. Denne løsning svarer til parametrene $Q = 1.25$, $E_0 = 0.5$, $T_r = 4$, $v = 7.5$, $v' = 10$. Opløsningen i tid og rum er $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ og $\Delta x = 2$. Tæthedsvariationen er her skaleret med $(\bar{n}/n_0)_{\max} = 0.026$.

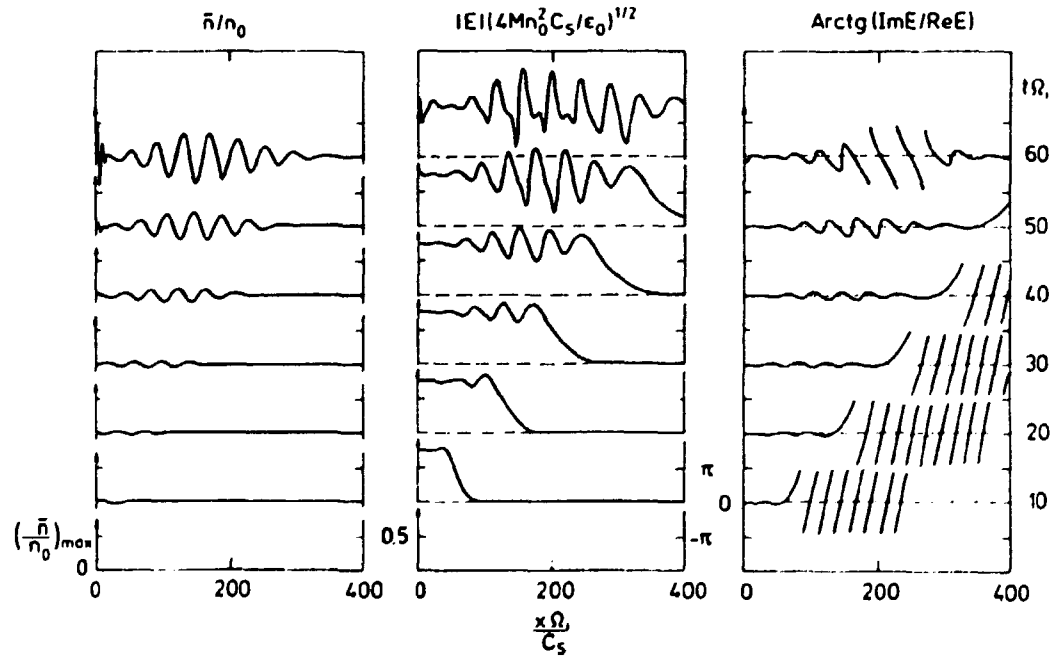


Fig. 7. Som i fig. 6, men med $E_0 = 0.75$ og $(\bar{n}/n_0)_{\max} = 0.210$.

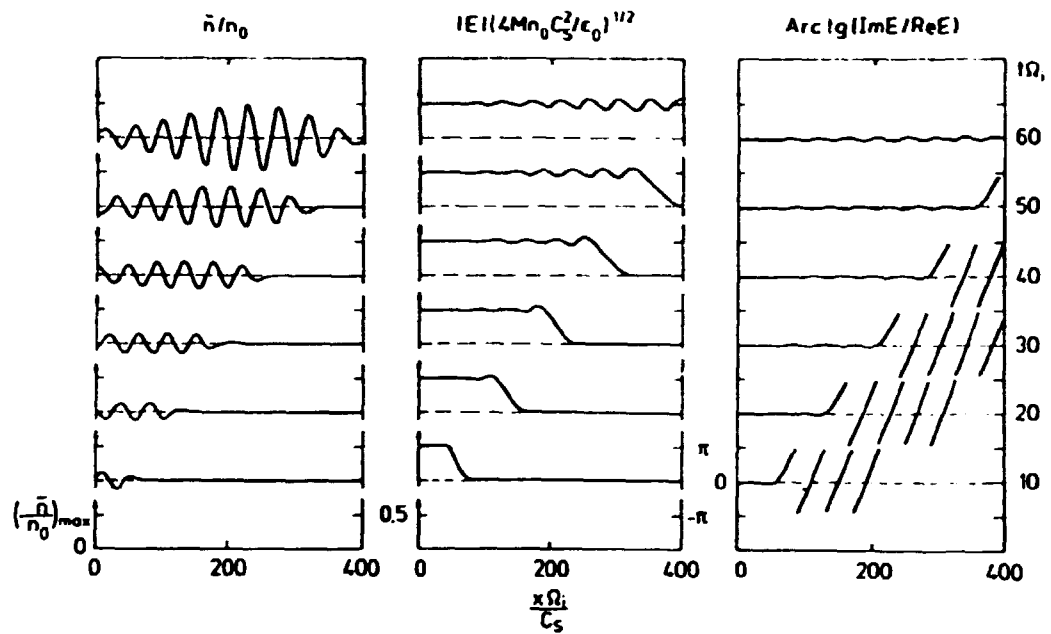


Fig. 8. Som i fig. 6, men med $v' = 5$ og $(\bar{n}/n_0)_{\max} = 0.015$.

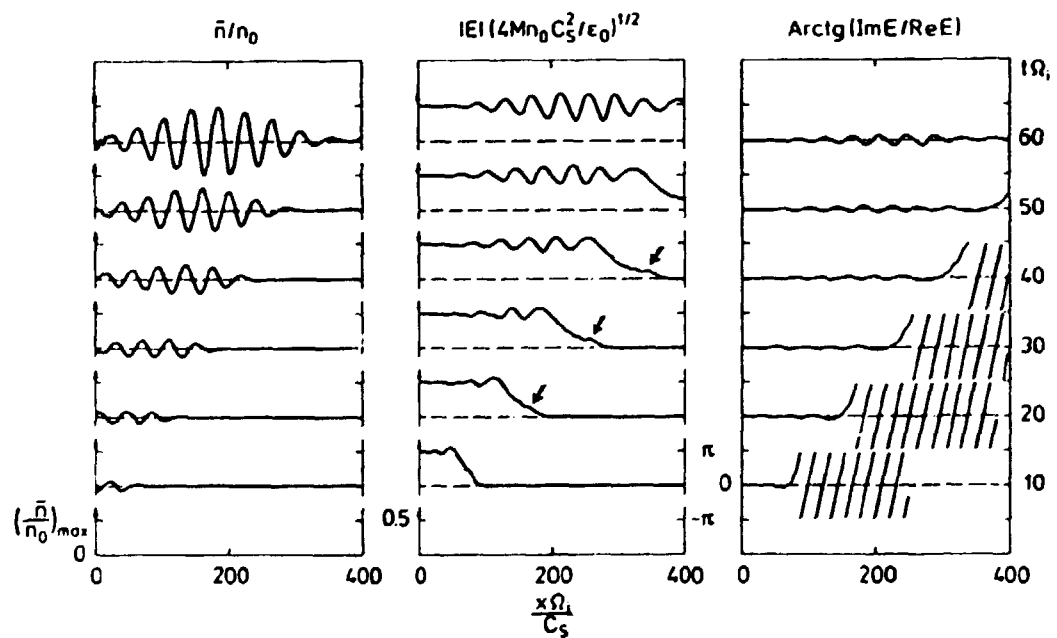


Fig. 9. Som i fig. 6, men med $T_r = 2$ og $(\bar{n}/n_0)_{\max} = 0.035$.

hvor vi har antaget, at $|E|^2 = F(x-vt, \epsilon t)$, og indført $\rho = x-vt$, se iøvrigt afsnit 6.2. Integralet i (7.10) vil netop give anledning til tæthedsvariationer med et karakteristisk bølgetal $K \sim 1/v$ ($= \Omega_i/V_g$ i fysiske enheder), i overensstemmelse med det observerede. For små t er det derfor også klart, at disse tæthedsvariationer intet har at gøre med de karakteristiske dispersive oscillationer i modulus af E .

- ii) Tæthedsvariationerne vekselvirker med indhyllningen af den højfrekvente bølge, og vi ser udviklingen af en instabilitet. Siden E er kompleks, finder vi, at både amplitude og fase moduleres. Ved at øge amplituden E_0 (se fig. 7) observeres det, at bølgeamplituden kan blive "mere end 100%" moduleret. Dette er ledsaget af et ulineært faseskift, der overstiger 2π . Gyldigheden af ligningerne (7.2) - (7.3) er dog nok noget problematisk for sådanne ekstreme situationer. I næste afsnit vil vi ved hjælp af af dispersionrelationen, vi fandt i afsnit 4.3, prøve at gøre nærmere rede for denne modulationsinstabilitet.

7.4. Den "ulineære" dispersionsrelation

Normaliseres den "ulineære" dispersionsrelation ligning (4.12) i overensstemmelse med (7.1) fås

$$(1 - \Omega^2 + K^2)((\Omega - Kv)^2 - K^4(\frac{v'}{2})^2) = -v'E_0^2\Omega K^4 \quad (7.11)$$

I fig. 10 er vist en numerisk løsning af (7.11) for reelle K med parametre, der svarer til løsningen vist i fig. 6. Vi ser, at der (når $v' > 0$, som i dette tilfælde,) langs K -aksen findes to ustabile områder, dvs. Ω er kompleks for en af dispersionsgrenene i disse områder. Det er det ustabile område omkring $K \sim 1/v$ (K lille), der er mest interessant i denne sammenhæng. Netop fordi det kun er bølger med $K \sim 1/v$, der direkte exciteres af bølgefronten, jvf. diskussionen i forrige afsnit. Derfor er den relevante del af dispersionsrelationen vist forstørret i fig. 11. Denne langbølgede instabilitet kan beskrives, som en

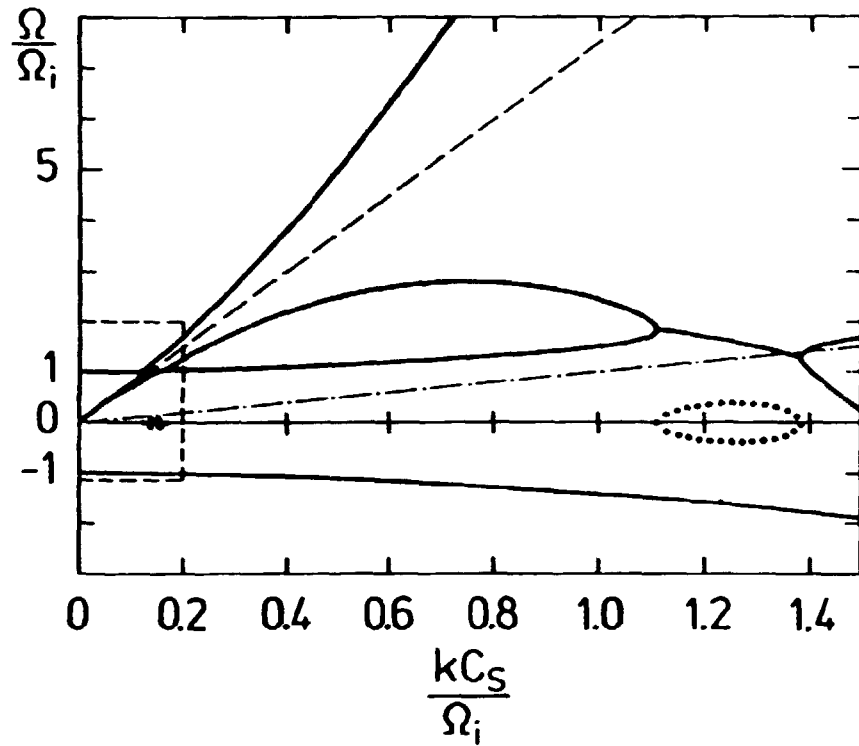


Fig. 10. Numerisk løsning af ligning (7.11) for parametre svarende til løsningen vist i fig. 6.
 —: $\text{Re}(\Omega)$;: $\text{Im}(\Omega)$; - - -: $\Omega = V_g K$ og
 - . - . -: $\Omega = C_s r$.

svag kobling (dvs. højre side af (7.11) er lille) mellem de to bølgetyper, der er givet ved venstre side af ligning (7.11). Helt konkret er det grenene $\Omega_1 = (1+K^2)^{1/2}$ og $\Omega_2 = vK - v'K^2/2$ ($Q = 0$), der kobler. Det har vist sig, at netop i skæringspunktet, hvor $\Omega_1 = \Omega_2$, er imaginærdelen af Ω størst. I dette skæringspunkt kan vi estimere $\Omega = \Omega_0 \pm i\gamma_0$ ved

$$\Omega_0 = (1 + K_0^2)^{1/2} \quad (7.12)$$

$$\gamma_0 = \left(\frac{E_0^2 Q K_0^2}{2\Omega_0} \right)^{1/2} \quad (7.13)$$

hvor

$$K_0 = \frac{v}{v'+1} \left(1 - \left(1 - 2 \frac{v'+1}{v^2} \right)^{1/2} \right), \quad K_0 \ll 1 \quad (7.14)$$

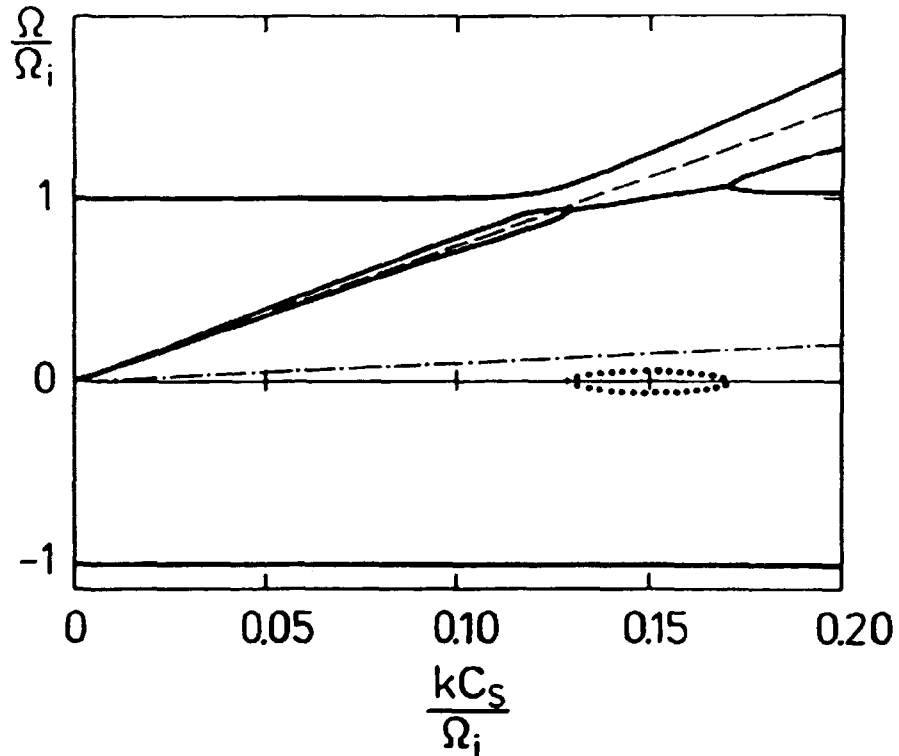


Fig. 11. Forstørrelse af det langbølgede område af fig. 10. Ellers som i fig. 10.

En grundigere analyse af figurerne 6 - 9 har vist, at der er en god overensstemmelse mellem disse resultater, og den observerede modulationsinstabilitet.

I nogle tilfælde observeres også en kortbølget instabilitet, se fig. 7. Denne er beskrevet ved den anden ustabile gren i fig. 10. Muligheden for at excitere denne vil altid være tilstede, da vi ser af ligning (7.11), at selv for meget små værdier af $E_0^2 Q v'$ vil højre side af (7.11) give anledning til en stærk kobling for tilstrækkelige store K . Vi tilskriver randbetingel-

sen (7.9) i $x = 0$ skylden for excitationen af disse kortbølgede oscillationer.

Det er muligt at afgøre, om disse instabiliteter er konvektive eller absolutte. Betragter vi f.eks. den langbølgede instabilitet. Vi kan approksimere den ustabile gren med $\text{Re}(\Omega) \approx \Omega_0 + U(K-K_0) + \beta(K-K_0)^2/2$ og $\text{Im}(\Omega) \approx \gamma_0 - \alpha(K-K_0)^2/2$, hvor konstanterne er lette at finde fra f.eks. fig. 11. Instabiliteten er da konvektiv, hvis $U^2 > U_c^2$, hvor $U_c^2 = 2\gamma_0(\alpha^2 + \beta^2)/\alpha$ (Feix (1963)). En anden og simplere måde er at approksimere grenene af dispersionsrelationen i området omkring K_0 med rette linier. Hvis linierne skærer K -aksen på hver side af K_0 , er instabiliteten absolut, men konvektiv, hvis det sker på samme side af K_0 (Briggs (1964); Bers (1973)). Vi finder i begge tilfælde, at instabiliteten for lange bølgelængder er konvektiv, medens den kortbølgede er absolut.

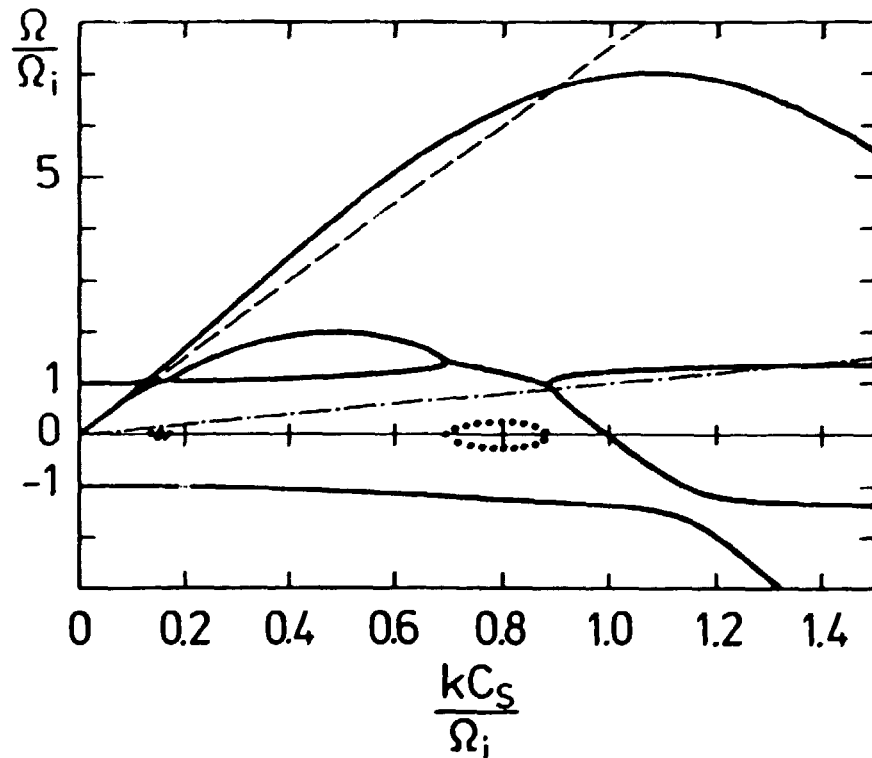


Fig. 12. Numerisk løsning af en modificeret udgave af ligning (7.11), der tager højde for endelige gittereffekter. Ved løsningen er benyttet de samme parametre som i fig. 10 og $\Delta x = 2$. Ellers som i fig. 10.

En anden interessant egenskab ved dispersionsrelationen i fig. 10 er grenen, der tillader hastigheder større end v . En lille forløber er da også ofte observeret foran den egentlige bølgefront, se fig. 9, hvor denne er indikeret med en pil. Karakteristisk for excitationen af denne løsning er, at stigtiden T_r er lille.

Strengt taget er dispersionsrelationen (7.11) ikke den, der svarer til den numeriske løsning af ligningerne (7.2) - (7.3), idet endelige gitter effekter (endelig Δx) indført ved differensstilnærmelsen, vil modificere ligning (7.11). I fig. 12 er vist en mere korrekt dispersionsrelation, der er udledt for frekvenser $\omega \ll 1/\Delta t$. Denne relation findes let ved at indføre: $\partial^2 A / \partial x^2$ som $-K^2 A_K \sin^2(K\Delta x/2)/(K\Delta x/2)^2$, og $\partial A / \partial x$ som $iKA_K \sin(K\Delta x)/(K\Delta x)$, hvor A betegner E henholdsvis N . Som forventet ses det, at endelige gittereffekter kun spiller en rolle, når $K\Delta x > 1$, dvs. når bølgelængden er sammenlignelig med eller mindre end den rumlige opløsning Δx .

7.5. Diskussion af resultater

Det skal understreges, at ligningerne (7.2) - (7.3) formelt set er ret generelle. De kan også beskrive koblingen mellem øvrehybrid bølger og elektrostatiske nedrehybrid bølger, hvis blot Ω_i erstattes af Ω_{LH} i normaliseringerne (7.1). Vi må dog kræve at $\omega_{pe} \gg \Omega_e$, således at udtrykket for den ponderomotive kraft stadig er gyldigt (afsnit 4.2). Ligning (7.2) kan også beskrive udbredelsen af elektromagnetiske bølger, som f.eks. den ordinære elektromagnetiske bølge. Derved kan ligningerne (7.2) - (7.3) beskrive dennes vekselvirkning med elektrostatiske ioncyklotron bølger eller nedrehybrid bølger. Ved at fjerne 1-tallet i ligning (7.3) (svarer til at sætte $\Omega_i = 0$), kan ligningssystemet udvides til at beskrive højfrekvente bølgers vekselvirkning med ionakustiske bølger i et plasma, magnetiseret såvel som umagnetiseret. I app. G har vi set på dette for $V_g > C_s$, og fundet, at overensstemmelsen med de analytiske resultater i afsnit 6.2 er god. Ved den numeriske løsning af (7.2) og (7.3) har vi været mest interesserede i tilfældet, hvor $V_g > C_s$, fordi bølgefronten kun i dette tilfælde giver anledning til en lavfrekvent

bølge, som den beskrevet ved ligning (7.10). Det er også det eneste relevante tilfælde for elektromagnetiske bølger i denne simple model, jvf. diskussionen i afsnit 4.2. Det er dog acceptabelt at have $V_g < C_s$ for elektrostatiske øvrehybrid bølger. Derfor har vi i fig. 13 medtaget en sådan løsning. Det bemærkes, at tæthedsperturbationerne er meget små, samt at den kortbølgede del af oscillationerne, exciteret af bølgefronten, bevæger sig med den største hastighed i overensstemmelse med dispersionsrelationen $\Omega^2 = \Omega_i^2 + C_s^2 k^2$, se iøvrigt afsnit 6.2.

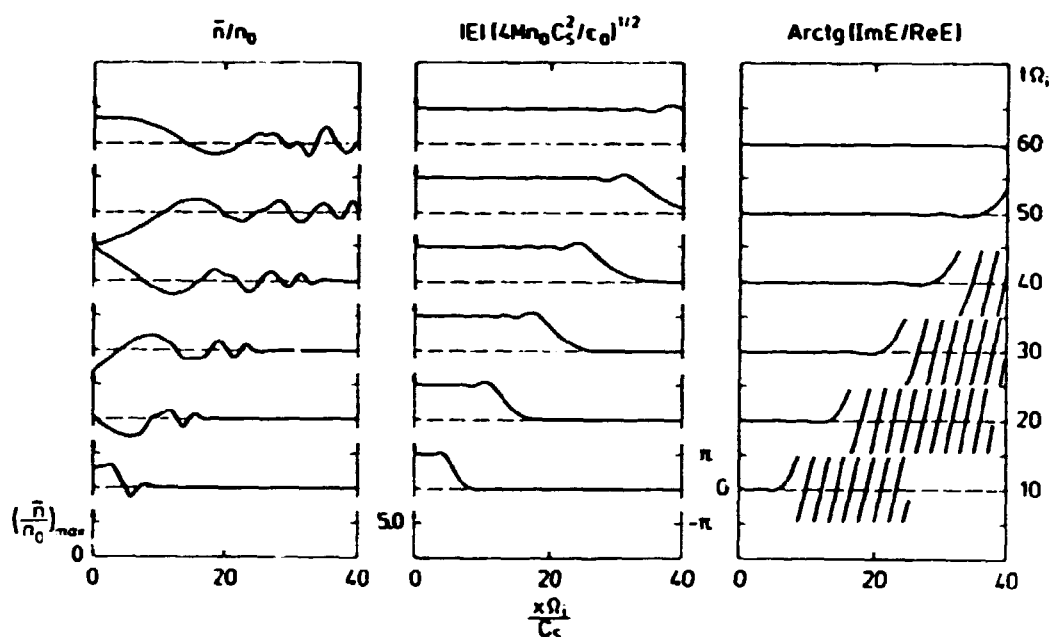


Fig. 13. Som i fig. 6, men med $v = 0.75$, $v' = 0.1$, $E_0 = 5$ og $(\bar{n}/n_0)_{\max} = 0.0037$.

I et forsøg på at estimere den praktiske betydning af disse resultater, noterer vi følgende: Størrelsen af gruppehastigheden V_g og stigtiden T_r er vigtige ved bestemmelsen af den initielle tæthedsperturbation, som det ses af ligning (7.10). Medens V_g , ω_{pe}/Ω_i og den højfrekvente bølges amplitude E_0 gennem leddet på højre side af ligning (7.11) ses at være bestemmende for styrken af modulationsinstabiliteten, der er aktuel, når det ulineære led i ligning (7.2) medtages. Betragt f.eks. en bølge, der er beskrevet ved en dispersionsrelation på formen $\omega_0^2 = \omega_p^2$

+ $\kappa^2 k^2$. Da er $V_g = \kappa(1 - \omega_p^2/\omega_o^2)^{1/2}$ og $V_g' = \kappa^2 \omega_p^2/\omega_o^3$. Ved at indføre $\Delta\omega = \omega_o - \omega_p$, og antage at $\Delta\omega/\omega_p \ll 1$, har vi at $V_g = \kappa\Delta\omega/\omega_p$ og $V_g' = \kappa^2(\omega_p - 3\Delta\omega)/\omega_p^2 \approx \kappa^2/\omega_p$. Hvis vi antager at $V_g \gg C_s$, er bølgelængderne af de lavfrekvente bølger, der følger den højfrekvente bølgefront, karakteristisk $\sim 2\pi V_g/\Omega_i$. Tilnærmes F i ligning (7.10) med

$$F(\rho, \epsilon t) = \begin{cases} E_o^2 & , \rho < 0 \\ E_o^2(1 - \rho/L) & , 0 \leq \rho < L \\ 0 & , \rho > L \end{cases} \quad (7.15)$$

finder vi, at den oscillerende del af \bar{n}/n_o i ligning (7.10) er givet ved

$$\frac{\bar{n}}{n_o} = \left(-\frac{1}{2} \frac{\epsilon_o}{n_o} \frac{E_o^2}{T_e}\right) \left(\frac{C_s \omega_p}{\kappa \Delta\omega}\right) \left(\frac{\rho_i}{L}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \kappa \frac{\Delta\omega}{L \Omega_i \omega_p}\right) \quad (7.16)$$

hvor $\rho_i = C_s/\Omega_i$ er en effektiv iongyroradius, og lydhastigheden C_s er tilnærmet med $\sqrt{T_e/M}$. Ligning (7.16) estimerer den initiale tæthedsperturbation, dvs. før modulationsinstabiliteten indtræffer. Det videre forløb er nu karakteriseret ved, at perturbationerne, estimeret ved ligning (7.16), vil vokse eksponentielt i tiden pga. modulationsinstabiliteten. Den mest interessante parameter er derfor højre side af ligning (7.11), som netop tager højde for den ulineære kobling mellem ligningerne (7.2) og (7.3). I fysiske enheder er dette koblingsled for $K = 1/v$ givet ved

$$C = -\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon_o}{n_o} \frac{E_o^2}{T_e}\right) \left(\frac{\omega_p}{2\Omega_i}\right) \left(\frac{V_g' \Omega_i}{C_s^2}\right) \left(\frac{C_s}{V_g}\right)^4 \quad (7.17)$$

eller tilnærmet

$$C = -\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon_o}{2n_o} \frac{E_o^2}{T_e}\right) \left(\frac{C_s}{\kappa}\right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\Delta\omega}\right)^4 \quad (7.18)$$

For løsningen, der er vist i fig. 6, er $C \approx -10^{-3}$. Udfra det tilnærmede udtryk (7.18) for C er det nu muligt at diskutere den fysiske relevans af vore resultater. For øvrehybrid bølger, hvor $\kappa/\sqrt{3}$ er lig med den elektrontermiske hastighed, ses det let, at selv for meget små bølgeamplituder, $\epsilon_0 E_0^2 / (2n_0 T_e) < m/M$, kan vi forvente væsentlige perturbationer. For elektromagnetiske bølger vil disse ulineariteter dog kun have betydning for plasmaer med en meget høj elektrontemperatur. Idet det ses af (7.18) ved at sætte κ lig med lyshastigheden c , at vi i dette tilfælde kan opnå passende værdier for C uden dermed at kræve, at $\Delta\omega$ skal være urimeligt lille.

8. KONKLUSION

I denne rapport har vi set på de transiente forhold ved udbredelsen af højfrekvente bølger i et homogent plasma. Vi har betragtet bølger med så stor amplitude, at plasmaets ulineariteter kan resultere i en væsentlig modifikation af udbredelsen i forhold til den tilsvarende lineære bølgeudbredelse. Ved studiet af de forskellige bølgetyper har vi undersøgt, om der bliver genereret harmoniske, om bølgerne via ponderomotive kræfter perturberer plasmataetheden og endelig, om sådanne lokale tæthedsvariationer får indflydelse på udbredelsen. Resultaterne fra denne undersøgelse er sammenfattet i tabel 1.

Bemærk at vi ved undersøgelsen af ekstraordinære bølger med hensyn til genereringen af harmoniske udelukkende har betragtet bølger, der ligger på den langsomme gren af dispersionsrelationen, se fig. 2 side 41. Det interessante i denne sammenhæng er netop, at den drevne harmoniske er tæt på resonans, det vil sige den er nær ved at opfylde dispersionsrelationen for den hurtige gren. En anden vigtig egenskab ved de ekstraordinære bølger er, at de også har en elektrostatisk komponent. Denne kombination medfører, at genereringen af harmoniske er særdeles vigtig selv i et homogent plasma af uendelig udstrækning (for inhomogene plasmaer se f.eks. Tewari og Tripathi (1980)).

Undersøgelsen har også vist, at der kan forventes en væsentlig tæthedsperturbation af plasmaet, når den højfrekvente bølges gruppehastighed er lig fasehastigheden af en lavfrekvent bølge. I tilfældet, hvor den lavfrekvente bølge er uden dispersion, er tæthedsændringen en jævn perturbation, ($V_g \neq C_s$), medens tæthedsperturbationen har en oscillerende karakter, når de lavfrekvente bølger er dispersive (magnetiseret plasma). I dette tilfælde har vi også set udviklingen af en modulationsinstabilitet, der er vel beskrevet ved en "ulinear" dispersionsrelation. Udfra dispersionsrelationen har vi bestemt instabiliteten til at være konvektiv samt fundet en koblingskonstant C.

Bemærk også, at denne undersøgelse har været mere eller mindre begrænset til bølger med gruppehastigheder større end den ionakustiske hastighed, samt at magnetfeltet er så svagt, at det simple udtryk for de ponderomotive kræfter er gyldigt.

I vores undersøgelse har vi udelukkende set på, hvad der sker med bølgefronten i udbredelsesretningen. Vi har derfor simplificeret problemet ved at betragte det endimensionalt. I den forbindelse er det derfor vigtigt, at ændringer af bølgen på tværs af udbredelsesretningen sker langsommere end ændringerne på langs, hvis vores resultater skal have nogen betydning i en realistisk situation. Ved vekselvirkningen med enten ioncyklotron eller nedrehybrid bølger er tidsskalaen for ændringer på langs givet ved $\sim \Omega^{-1}$, hvor Ω er enten Ω_i eller Ω_{LH} . Ved vekselvirkning med ionakustiske bølger er tidsskalaen for ændringer på langs givet ved $\sim L/C_s$, hvor L er en karakteristisk længde af bølgefronten. I arbejdet af f.eks. Sodha m.fl. (1979) betragtes en stråle af bølger med en endelig radiær bredde r_0 . Når denne stråle skydes ind i et plasma, antager de, at den termiske udvidelse af det opvarmede plasma medfører en ændring af den lokale tæthed og påvirker derved udbredelsen af de indkomne bølger. For disse processer kan tidsskalaen estimeres til at være givet ved $\sim r_0/C_s$. I tilfælde, hvor denne tid er meget stor i forhold til de andre karakteristiske tider, vil disse ændringer næppe influere på vores resultater.

Tabel 1.

	Bølgetype	dispersions- relation	2. harmoniske	ionakustiske bølger $\eta^2 = c_s^2 k^2$		
u n e t l i n e r e	Elektromagne- tiske bølger	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$	ingen betydning, (2 ω , 2k) er elektrostatisk	ingen betydning, $v_g \gg c_s$		
	Elektrosta- tiske bølger	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3v_{Te}^2 k^2$	ingen betydning, harmoniske er kraftigt dæmpede (Landau)	Vigtig, $v_g < c_s$: neg. \bar{n}/n_0 $v_g > c_s$: pos. \bar{n}/n_0	ioncyklotron bølger $\eta^2 = \eta_i^2 + c_s^2 k^2$	nedrehybrid bølger $\eta^2 = \eta_{UH}^2 + c_s^2 k^2$
n e t l i n e r e p l a n e	Elektromagne- tiske ordinære bølger	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$	ingen betydning, (2 ω , 2k) er elektrostatisk	ingen betydning, $v_g \gg c_s$	vigtig, \bar{n}/n_0 osc. og mulighed for modulations- instabilitet	Vigtig, \bar{n}/n_0 osc. og mulighed for modulations- instabilitet
	Elektromagne- tiske ekstra- ordinære bølger	$k^2 c^2 = (\omega^2 (\omega^2 - \omega_{UH}^2) - \omega_{pe}^2 (\omega^2 - \omega_{pe}^2)) / (\omega^2 - \omega_{UH}^2)$	vigtig, der genereres (2 ω , 2k), (2 ω , k(2 ω)) og (ω_x , k_x)	ingen betydning, $v_g \gg c_s$	vigtig, \bar{n}/n_0 osc. og mulighed for modulations- instabilitet	Vigtig, \bar{n}/n_0 osc. og mulighed for modulations- instabilitet
	Elektro- statisk øvrehybrid bølger	$\omega^2 = \omega_{UH}^2 + 3v_{Te}^2 k^2$	ingen betydning, harmoniske er kraftigt dæmpede (Landau)	Vigtig, $v_g < c_s$: neg. \bar{n}/n_0 $v_g > c_s$: pos. \bar{n}/n_0	Vigtig, både for $v_g < c_s$ og $v_g > c_s$ og mulighed for modul. inst.	Vigtig, både for $v_g < c_s$ og $v_g > c_s$ og mulighed for modul. inst.

Ved beskrivelsen af plasmaet benyttede vi en to-fluidbeskrivelse, hvorfor resultaterne kun er gyldige for bølger med fasehastigheder meget større end de tilsvarende termiske hastigheder. Kinetiske effekter er altså blevet negligeret.

Kendetegnende for vores undersøgelse er, at vi i alle tilfælde har betragtet situationen, hvor der til et givet tidspunkt "tændes" for en monokromatisk bølge (eller en strøm der giver anledning til samme) på et lokaliseret sted. Den modsatte situation, hvor der istedet "slukkes" for bølgen det pågældende sted kan behandles på en tilsvarende måde. Dette er især interessant, hvis dispersionsrelationen for bølgen er sådan, at gruppehastigheden er faldende for voksende frekvens (negativ dispersion). Er generering af 2.harmoniske mulig i dette tilfælde, vil den 2.harmoniske bølge fremtræde som en "bagløber" bag afslutningen af bølgen, idet gruppehastigheden af den 2.harmoniske er mindre end den fundamentale bølges gruppehastighed (se f.eks. Jørgensen (1981)).

Vi vil her slutte af med at nævne to forslag til nye undersøgelser, der har betydning i denne sammenhæng:

- 1) Det vil være interessant at se på udbredelsen af en højfrekvent bølgepakke i et plasma med en temperaturgradient, for at undersøge hvad der sker, når bølgepakkens gruppehastighed er lig med den lokale ionakustiske hastighed.
- 2) I kapitel 7 fandt vi, at den "ulineære" dispersionsrelation udover den langbølgede instabilitet også indeholder en kortbølget instabilitet. Under hvilke omstændigheder er den kortbølgede aktuel? Dette har vi tænkt os at undersøge ved at se på to forskellige situationer: i) En perturberet plan bølge i et plasma med en uperturberet tæthed. ii) En uperturberet plan bølge i et plasma med en perturberet tæthed.

Bemærk endelig, at ligningerne (7.2) - (7.3) er en ikke trivial generalisering af de såkaldte Zakharov-ligninger (Zakharov (1971)) i et magnetiseret plasma. Mens f.eks. Zakharov (1975); Freund og Papadopoulos (1980); Weatherall m.fl. (1981) har set på en modifikation af ligningen for de højfrekvente bølger på

grund af magnetfeltet, har vi her set på en modifikation af ligningen for de lavfrekvente bølger.

Denne rapport er en beskrivelse af en del af det arbejde, jeg har deltaget i under mit licentiatsstudium i gruppen for fundamental plasmafysik på Forsøgsanlæg Risø. Jeg vil gerne takke Forsøgsanlæg Risø for dette licentiatstipendium. Desuden vil jeg gerne takke medarbejderne i plasmafysikgruppen for hjælp og støtte under studiet.

Risø, den 18. maj 1983.

A handwritten signature in black ink, reading 'Knud Thomsen'. The script is cursive and fluid, with the first name 'Knud' and last name 'Thomsen' clearly distinguishable.

Knud Thomsen

9. REFERENCER

- BAERWALD, H.G. (1930) Ann. d. Phys., 6, 295.
- BAUMGARTEL, K. og ZCHAKAJA, D. (1977). Plasmaphysik, 6, 75.
- BERS, A. (1973) "Survey Lectures from International Congress on Waves and Instabilities in Plasmas", Innsbruck, Austria, April 2-7.
- BRIGGS, R.J. (1964) "Electron Stream Interaction with Plasmas", M.I.T. Press Cambridge, Mass.
- BRILLOUIN, L. (1960) "Wave Propagation and Group Velocity". Academic.
- BUCKLEY, R. (1975). J. Plasma Phys. 13, 539.
- ČADEŽ, V.M. og JOVANOVIĆ, D. (1981) Spring College on Fusion Energy, Trieste, Italy, Contributed Papers.
- CHEN, F.F. (1974) "Introduction to Plasma Physics", Plenum Press.
- DYSTHE, K.B. og PÉCSELI, H.L. (1977) Plasma Phys., 19, 931.
- DYSTHE, K.B. og PÉCSELI, H.L. (1978) Plasma Phys., 20, 971.
- DYSTHE, K.B., MJØLHUS, E., PÉCSELI, H.L. og STENFLO, L. (1978) Plasma Phys., 20, 1087.
- ELBRØND JENSEN, H. (1974) "Matematisk analyse". Bind 3. Matematisk Institut. Danmarks tekniske Højskole.
- FREUND, H.P. og PAPADOPOULOS, K. (1980) Phys. Fluids, 23, 139.
- HASEGAWA, A. (1975). "Plasma Instabilities and Nonlinear Effects". Physics and Chemistry in Space vol. 8. Springer-Verlag.
- HASKELL, R.E. og CASE, C.T. (1967) IEEE Trans. on Antennas and Propagation, AP-15, 458.
- JOVANOVIĆ, D., PÉCSELI, H.L. og THOMSEN, K. (1982) J. Plasma Phys., 28, 159.
- JØRGENSEN, J. (1981) Eksamensprojekt, Afdelingen for elektrofysik, Danmarks tekniske højskole.
- KADOMTSEV, B.B. og KARPMAN, V.I. (1971). Usp. Fiz. Nauk., 103, 193 (1971, Sov. Phys. Usp. 14, 40).
- KARPMAN, V.I. og SHAGALOV, A.G. (1982) J. Plasma Phys., 27 215.

- KAW, P.K., SCHMIDT, G. og WILCOX, T. (1973) Phys. Fluids, 16, 1522.
- KAW, P.K. og NISHIKAWA, K. (1975) J. Phys. Soc. Japan, 38, 1753.
- LONNGREN, K.E. (1977) Proc. India Acad. Sci., A86, 125.
- LONNGREN, K.E., PÉCSELI, H.L., RASMUSSEN, J. JUUL og THOMSEN, K. (1982) Physica Scripta, T2, 546.
- MANHEIMER, W.M. og OTT, E. (1974) Phys. Fluids, 17, 1413.
- PÉCSELI, H.L. (1981) "Nonlinear electronplasma waves", Foredrag ved forårsmøde i dansk fysisk selskab, Risø, Danmark, maj 21-22.
- PÉCSELI, H.L. og THOMSEN, K. (1982) Physica Scripta, T2, 541.
- PÉCSELI, H.L., RASMUSSEN, J. JUUL og THOMSEN, K. (1983) Physics letters, 99A, 175.
- RYPDAL, K., LYNØV, J.P., PÉCSELI, H.L., RASMUSSEN, J. JUUL og THOMSEN, K. (1982) Physica Scripta, T2, 534.
- SATO, N., MÅRK, E. og POPA, G. (1976) Plasma Phys., 18, 897.
- SCOTT, A.C. (1982) Phys. Rev. A, 26, 578.
- SODHA, M.S., SHARMA, J.K., TEWARI, D.P., SHARMA, R.P. og KANSHIK, S.C. (1979) J. Appl. Phys., 50, 6214.
- TEWARI, D.P. og TRIPATHI, V.K. (1980) Phys. Rev., A21, 1698.
- THORNHILL, S.G. og ter HAAR, D. (1978) Physics Reports, 43, 43.
- VAĬNSHTEĬN, L.A. (1976) Usp. Fiz. Nauk, 118, 339 (1976, Sov. Phys. Usp., 19, 189).
- WEATHERALL, J.C., GOLDMAN, M.V. og NICHOLSON, D.R. (1981) Astrophys. J. 246, 306.
- YAJIMA, N. OIKAWA, M., SATSUMA, J. og NAMBA, C. (1975) Rep. Res. Inst. for Appl. Mech., 22, 89.
- YEH, K.L. og LIU, C.H. (1972) "Theory of Ionospheric Waves", Int. Geophys. Series vol. 17. Academic.
- YU, M.Y. og SHUKLA, P.K. (1977) Plasma Phys., 19, 889.
- ZAKHAROV, V.E. (1971) Zh. Eksp. Teor. Fiz., 62, 1745 (1972, Sov. Phys. JETP., 35, 908).
- ZAKHAROV, V.E. (1975) ZhETF Piz. Red. 21, 479 (1975, JETP Lett., 21, 221).

APPENDIKS A

Udledning af ligning (2.48) for højfrekvente elektrostatiske bølger i magnetiseret plasma.

Som udgangspunkt benyttes ligningssystemet

$$\frac{\partial}{\partial t} n + n_0 \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{n} \vec{v} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \nabla n + \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B}_0 = \vec{0} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = - \frac{e}{\epsilon_0} n \quad (\text{A.3})$$

vi vil i det følgende eliminere n og \vec{v} . Den resulterende ligning for \vec{E} vil efter indsættelse af $\vec{E} = -\nabla \phi$ give ligning (2.48). Divergensen af (A.2) sammen med $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_0) = \vec{B}_0 \cdot (\nabla \times \vec{v})$ giver

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{v} = - 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \nabla^2 n - \frac{e}{m} \nabla \cdot \vec{E} - \frac{e}{m} \vec{B}_0 \cdot (\nabla \times \vec{v}) \quad (\text{A.4})$$

rotationen af (A.2) sammen med $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{B}_0 \nabla \cdot \vec{v}$ giver

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{v} = - \frac{e}{m} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B}_0 \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{A.5})$$

bruger vi nu $\partial/\partial t$ på (A.4) og indsætter (A.5) heri, fås idet $\vec{B}_0 \cdot (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \vec{v}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} \cdot \vec{v} = & - 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \vec{v}^2 \frac{\partial}{\partial t} n - \frac{e}{m} \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}) \vec{B}_0 \cdot \vec{v} \\ & - \left(\frac{e}{m}\right)^2 B_0^2 \vec{v} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (A.6)$$

Vi får nu brug for $\vec{B}_0 \cdot \vec{v}$ på (A.2)

$$\vec{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = - 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{v} n - \frac{e}{m} \vec{B}_0 \cdot \vec{E} \quad (A.7)$$

Ved at bruge henholdsvis $\partial/\partial t$ og $\partial^3/\partial t^3$ på (A.1) fås

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \cdot \vec{v} = - \frac{1}{n_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} n - \frac{1}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \cdot \vec{n} \vec{v} \quad (A.8)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \vec{v} \cdot \vec{v} = - \frac{1}{n_0} \frac{\partial^4}{\partial t^4} n - \frac{1}{n_0} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \vec{v} \cdot \vec{n} \vec{v} \quad (A.9)$$

Bruger vi nu $\partial/\partial t$ på (A.6), og indsætter heri (A.7) - (A.9)

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{n_0} \frac{\partial^4}{\partial t^4} n + 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \vec{v}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} n + \frac{e}{m} \vec{v} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \left(\frac{e}{m}\right)^2 B_0^2 \frac{1}{n_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} n \\ & + \left(\frac{e}{m}\right)^2 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}) \vec{B}_0 \cdot \vec{v} n + \left(\frac{e}{m}\right)^3 (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}) \vec{B}_0 \cdot \vec{E} = \\ & \frac{1}{n_0} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \vec{v} \cdot \vec{n} \vec{v} + \left(\frac{e}{m}\right)^2 B_0^2 \frac{1}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \cdot \vec{n} \vec{v} \end{aligned} \quad (A.10)$$

Ved nu at bruge (A.3), indføre $\omega_{pe}^2 = e^2 n_0 / \epsilon_0 m$ og $\Omega_e = e B_0 / m$ samt til slut gange igennem med $(m/e) \omega_{pe}^2$ får vi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial^4 \vec{E}}{\partial t^4} - 3V_{Te}^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}) + \omega_{pe}^2 \nabla \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \Omega_e^2 \nabla \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ - 3V_{Te}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) + \omega_{pe}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \vec{E} = \end{aligned} \quad (A.11)$$

$$\frac{e}{\epsilon_0} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \nabla \cdot \vec{n} \vec{v} + \frac{e}{\epsilon_0} \Omega_e^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{n} \vec{v}$$

Vi mangler nu blot at eliminere \vec{v} af de ulineære led på højre side af (A.11). Da \vec{n} er langsomt varierende i tid i forhold til \vec{v} , n og \vec{E} , betyder dette

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{n} \vec{v} \approx \nabla \cdot \vec{n} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (A.12)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \nabla \cdot \vec{n} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{n} \frac{\partial^3 \vec{v}}{\partial t^3} \quad (A.13)$$

Ved at anvende $\nabla \cdot \vec{n} \partial^2 / \partial t^2$ på (A.2) fås

$$\nabla \cdot \vec{n} \frac{\partial^3 \vec{v}}{\partial t^3} = - 3V_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \nabla \cdot \vec{n} \nabla \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{e}{m} \nabla \cdot \vec{n} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (A.14)$$

$$- \frac{e}{m} \vec{B}_0 \cdot \nabla \times \vec{n} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}$$

for at finde det sidste led i (A.14) bruger vi nu $\nabla \times \vec{n} \partial / \partial t$ på (A.2)

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{n} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = & - 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \nabla \times \bar{n} \nabla \frac{\partial}{\partial t} n - \frac{e}{m} \nabla \times \bar{n} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \\ & + \frac{e}{m} \vec{B}_0 \nabla \cdot \bar{n} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} - \frac{e}{m} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \bar{n} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \end{aligned} \quad (A.15)$$

Ligning (A.2) indsættes i det sidste led i (A.15), der herefter bruges i det sidste led i (A.14). Dette giver

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{n} \frac{\partial^3 \vec{v}}{\partial t^3} + \Omega_e^2 \nabla \cdot \bar{n} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = & - \frac{e}{m} \nabla \cdot \bar{n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \left(\frac{e}{m}\right)^3 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \bar{n} \vec{B}_0 \cdot \vec{E} \\ & + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \vec{B}_0 \cdot (\nabla \bar{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}) - 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \nabla \cdot \bar{n} \nabla \frac{\partial^2}{\partial t^2} n \\ & + 3v_{Te}^2 \frac{e}{n_0 m} \vec{B}_0 \cdot (\nabla \times \bar{n} \nabla \frac{\partial}{\partial t} n) \\ & - 3v_{Te}^2 \frac{1}{n_0} \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \bar{n} \vec{B}_0 \cdot \nabla n \end{aligned} \quad (A.16)$$

De tre sidste led i (A.16) vil vi negligere, da det ses ved indsættelse af (A.3), at de alle er af relativ størrelsesorden $(\lambda_{De}/l)^2$. Indsættes (A.16) i (A.11), finder vi endelig ligningen for \vec{E}

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Te}^2 \nabla^2 + \omega_{pe}^2 + \Omega_e^2\right) \nabla \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \\ - 3v_{Te}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) + \omega_{pe}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \vec{E} \\ = - \omega_{pe}^2 \nabla \cdot \frac{\bar{n}}{n_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \\ - \omega_{pe}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \frac{\bar{n}}{n_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{E} + \omega_{pe}^2 \frac{e}{m} \vec{B}_0 \cdot \left(\frac{\nabla \bar{n}}{n_0} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\right) \end{aligned} \quad (A.17)$$

APPENDIKS B

Udledning af ligning (2.62) for lavfrekvente elektrostatiske ioncyklotron bølger drevet af ponderomotive kræfter.

Som udgangspunkt benyttes ligningssystemet

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n} + n_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \gamma_i T_i \frac{1}{n_0 M} \nabla \bar{n} + \frac{e}{M} \nabla \bar{\phi} - \frac{e}{M} \vec{v} \times \vec{B}_0 = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$T_e \frac{1}{n_0} \nabla \bar{n} - e \nabla \bar{\phi} + \frac{\epsilon_0}{2n_0} \nabla F = 0 \quad (\text{B.3})$$

Her har vi for nemheds skyld indført $\bar{n} = \bar{n}_e = \bar{n}_i$, $\vec{v} = \vec{v}_i$ og $F = (\nabla \bar{\phi})^2$.

Vi vil i det følgende eliminere \vec{v} og $\bar{\phi}$. Divergensen af (B.2) sammen med $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_0) = \vec{B}_0 \cdot (\nabla \times \vec{v})$ giver

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{v} = - \gamma_i T_i \frac{1}{M} \nabla^2 \bar{n} - \frac{e}{M} \nabla^2 \bar{\phi} + \frac{e}{M} \vec{B}_0 \cdot (\nabla \times \vec{v}) \quad (\text{B.4})$$

Rotationen af (B.2) giver

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \frac{e}{M} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{e}{M} \vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (\text{B.5})$$

Efter differentiation af (B.4) mht. tiden får vi efter indsættelse af (B.1) i det første led, (B.5) i det sidste og til slut differentiation mht. tiden en gang mere

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\bar{n}}{n_0} - \gamma_i T_i \frac{1}{M} \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} + \left(\frac{e}{M} B_0\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} =$$

$$\frac{e \nabla^2}{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\phi} - \left(\frac{e}{M}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}$$

(B.6)

Ved at bruge $\vec{B}_0 \cdot$ på (B.2) fås

$$\vec{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = - \gamma_i T_i \frac{1}{M} \vec{B}_0 \cdot \nabla \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{e}{M} \vec{B}_0 \cdot \nabla \bar{\phi}$$

(B.7)

Ved at indsætte (B.7) i (B.6) og eliminere $\bar{\phi}$ ved hjælp af (B.3), får vi

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\bar{n}}{n_0} + \left(\frac{e}{M} B_0\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} - (T_e + \gamma_i T_i) \frac{1}{M} \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0}$$

$$- (T_e + \gamma_i T_i) \frac{1}{M} \left(\frac{e}{M}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \nabla \frac{\bar{n}}{n_0} =$$

(B.8)

$$\frac{\epsilon_0}{2n_0 M} \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P + \frac{\epsilon_0}{2n_0 M} \left(\frac{e}{M}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \nabla P$$

Indfører vi nu $\Omega_i = eB_0/M$, $C_s^2 = (T_e + \gamma_i T_i)/M$, $(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \nabla \bar{n}/n_0 = B_0^2 \nabla_{||}^2 \bar{n}/n_0$ og udtrykket for P , fås endelig

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2 + \Omega_i^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 \Omega_i^2 \nabla_{||}^2 \right] \frac{\bar{n}}{n_0} =$$

(B.9)

$$\left(\nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_i^2 \nabla_{||}^2 \right) \frac{\epsilon_0}{2n_0 M} (\nabla \bar{\phi})^2$$

APPENDIKS C

Udledning af ligning (2.72) for elektrostatiske nedrehybrid bølger (med frekvenser $\omega \gg \Omega_i$), som er drevet af ponderomotive kræfter.

Som udgangspunkt benyttes ligningssystemet

$$\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (C.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \gamma_i T_i \frac{1}{M n_0} \nabla \bar{n}_i + \frac{e}{M} \nabla \bar{\phi} = \vec{0} \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial \bar{n}_e}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_e = 0 \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + T_e \frac{1}{m n_0} \nabla \bar{n}_e - \frac{e}{m} \nabla \bar{\phi} + \frac{e}{m} \vec{v}_e \times \vec{B}_0 + \frac{\epsilon_0}{2 m n_0} \nabla F = \vec{0} \quad (C.4)$$

$$\bar{n} = \bar{n}_e = \bar{n}_i \quad (C.5)$$

For nemheds skyld har vi indført $\vec{v}_i = \vec{v}_i$, $\vec{v}_e = \vec{v}_e$ og $F = (\nabla \bar{\phi})^2$.

Vi vil i det følgende eliminere \vec{v}_i , \vec{v}_e og $\bar{\phi}$. Dette resulterer i en ligning for \bar{n} . Ved i en tilnærmelse til denne ligning at indføre $\vec{B}_0 \parallel \hat{z}$ fås ligning (2.72).

Vi vil gøre brug af følgende: $v_{Te}^2 = T_e/m$, $v_{Ti}^2 = T_i/M$, $C_s^2 = (T_e + \gamma_i T_i)/M$, $\Omega_e = eB_0/m$, $\Omega_i = eB_0/M$ og $\mu = m/M$.

Ligningssystemet lyder herefter

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{n}}{n_0} = - \nabla \cdot \vec{v}_i \quad (C.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_i = - \gamma_i v_{Ti}^2 \nabla \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{e}{m} \nabla \bar{\phi} \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{n}}{n_0} = - \nabla \cdot \vec{v}_e \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_e = - v_{Te}^2 \nabla \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{e}{m} \nabla \bar{\phi} - \frac{e}{m} \vec{v}_e \times \vec{B}_0 - \frac{\epsilon_0}{2mn_0} \nabla^2 \bar{\phi} \quad (C.9)$$

Ved at kombinere ligningerne, der fremkommer ved at virke med $\nabla \cdot$ på (C.7) og $\partial/\partial t$ på (C.6), fås

$$\nabla^2 \bar{\phi} = \frac{m}{e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{m}{e} \gamma_i v_{Ti}^2 \nabla^2 \frac{\bar{n}}{n_0} \quad (C.10)$$

Ved at dividere (C.7) med μ fås

$$\frac{e}{m} \nabla \bar{\phi} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_i - \gamma_i v_{Ti}^2 \frac{1}{\mu} \nabla \frac{\bar{n}}{n_0} \quad (C.11)$$

Indføres (C.11) i (C.9) får vi

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_e + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_i = - (v_{Te}^2 + \frac{\gamma_i}{\mu} v_{Ti}^2) \nabla \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{e}{m} \vec{v}_e \times \vec{B}_0 - \frac{\epsilon_0}{2mn_0} \nabla^2 \bar{\phi} \quad (C.12)$$

Tager vi nu divergensen af (C.12), indsætter heri (C.6) og (C.8), udnytter at $\nabla \cdot (\vec{v}_e \times \vec{B}_0) = \vec{B}_0 \cdot (\nabla \times \vec{v}_e)$ og indfører $\alpha = 1 + 1/\mu$, $\beta = v_{Te}^2 + (\gamma_i/\mu)v_{Ti}^2$, har vi

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} - \beta v^2 \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{\epsilon_0}{2mn_0} \nabla^2 P = \frac{e^+}{m} \vec{B}_0 \cdot (\nabla \times \vec{v}_e) \quad (C.13)$$

Rotationen af (C.9) giver

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_e = \frac{e^+}{m} \vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_e) - \frac{e}{m} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_e \quad (C.14)$$

Ved at bruge $\partial/\partial t$ på (C.13), indsætte (C.14) og (C.8) heri og anvende $\partial/\partial t$ endnu en gang, fås

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\bar{n}}{n_0} - \beta v^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} + \Omega_e^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{\epsilon_0}{2mn_0} \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P = \\ - \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_e \end{aligned} \quad (C.15)$$

Prik produktet mellem \vec{B}_0 og (C.9) giver

$$\vec{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_e = -v_{Te}^2 \vec{B}_0 \cdot \nabla \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{e^+}{m} \vec{B}_0 \cdot \nabla \phi - \frac{\epsilon_0}{2mn_0} \vec{B}_0 \cdot \nabla P \quad (C.16)$$

Ved at bruge $\vec{B}_0 \cdot \nabla (\vec{B}_0 \cdot \nabla A) = \nabla_{||}^2 A$, ser vi, at $\vec{B}_0 \cdot \nabla$ på (C.16) giver

$$\vec{B}_0 \cdot \nabla (\vec{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_e) = - B_0^2 v_{Te}^2 \nabla_{||}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{e}{m} B_0^2 \nabla_{||}^2 \bar{\phi} - \frac{\epsilon_0 B_0^2}{2m n_0} \nabla_{||}^2 F \quad (C.17)$$

Indsættelse af (C.17) i (C.15) giver

$$\alpha \frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\bar{n}}{n_0} - \beta \nabla^2 \frac{\bar{n}}{n_0} + \Omega_e^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} - \Omega_e^2 v_{Te}^2 \nabla_{||}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{\epsilon_0}{2m n_0} \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} F \quad (C.18)$$

$$- \frac{\epsilon_0 \Omega_e^2}{2m n_0} \nabla_{||}^2 F = - \frac{e}{m} \Omega_e^2 \nabla_{||}^2 \bar{\phi}$$

Ved nu at anvende ∇^2 på (C.18) og indsætte (C.10) heri, fås

$$\nabla^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{\beta}{\alpha} \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{1}{\alpha} \Omega_e^2 \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{1}{\alpha} \Omega_e^2 v_{Te}^2 \nabla^2 \nabla_{||}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} \quad (C.19)$$

$$+ \frac{1}{\mu \alpha} \Omega_e^2 \nabla_{||}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{1}{\mu \alpha} \Omega_e^2 \gamma_i v_{Ti}^2 \nabla^2 \nabla_{||}^2 \frac{\bar{n}}{n_0} =$$

$$\frac{\epsilon_0}{2 \alpha m n_0} \nabla^2 \left(\nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} F + \Omega_e^2 \nabla_{||}^2 F \right)$$

Vi vil nu indføre følgende approksimationer

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mu v_{Te}^2 + \gamma_i v_{Ti}^2}{1 + \mu} \approx \frac{T_e + \gamma_i T_i}{M} = C_S^2 \quad (C.20)$$

$$\frac{\Omega_e^2}{\alpha} = \frac{\mu \Omega_e^2}{1+\mu} = \Omega_i \Omega_e \quad (C.21)$$

$$\frac{\Omega_e^2}{\mu \alpha} = \frac{\Omega_e^2}{1+\mu} = \Omega_e^2 \quad (C.22)$$

$$\frac{\Omega_e^2}{\alpha} (v_{Te}^2 + \frac{\gamma_i}{\mu} v_{Ti}^2) = \frac{\Omega_e^2}{\mu \alpha} (\frac{T_e + \gamma_i T_i}{M}) = \Omega_e^2 C_s^2 \quad (C.23)$$

$$\frac{1}{\alpha m} = \frac{1}{\frac{M}{(1+\frac{\gamma}{\mu})m}} = \frac{1}{M} \quad (C.24)$$

Indsættes (C.20) - (C.24) i (C.19) får vi endelig

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2 + \Omega_i \Omega_e \right) \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_e^2 \nabla^2 \left| \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2 \right) \right| \right] \frac{\bar{n}}{n_0} = \quad (C.25)$$

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_e^2 \nabla^2 \right) \frac{\epsilon_0}{2 M n_0} \overline{(\nabla \phi)^2}$$

APPENDIKS D

Antag det drivende led er givet på formen $((2\omega_0, 2k_0)$ betegnes (ω_1, k_1))

$$\vec{Y}(t, x) = \exp(-i(\omega_1 t - k_1 x)) h(t - x/v_1) \quad (D.1)$$

I afsnit 5.1 fandt vi følgende løsning til (5.1)

$$\vec{E}(t, x) = \vec{E}_f(t, x) + \vec{E}_e(t, x) + \vec{E}_x(t, x) \quad (D.2)$$

hvor

$$\vec{E}_f = \exp(-i(\omega_1 t - k_1 x)) h(t - x/v_1) \quad (D.3)$$

$$\vec{E}_e = \exp(-i(\omega_1 t - k(\omega_1) x)) h(t - x/v_2) \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_x = \exp(-i((\omega_1 + \Delta\omega)t \\ - k(\omega_1 + \Delta\omega)x)) [h(t - x/v_2) - h(t - x/v_1)] \end{aligned} \quad (D.5)$$

\vec{E}_f er den drevne bølge, der repræsenterer plasmaets lokale svar på \vec{Y} . \vec{E}_e er det ikke-lokale svar, hvilket vi kan anskueliggøre ved at betragte det drivende led \vec{Y} som et sæt af infinitesimale tynde lag, der oscillerer med frekvensen ω_1 , og som hver især exciterer den tilsvarende egenbølge $(\omega_1, k(\omega_1))$. \vec{E}_x er en egenbølge exciteret med en Doppler-forskuet frekvens.

Analogt kan vi repræsentere \vec{Y} som et sæt af begyndelsesværdier, som har bølgelængden $2\pi/k_1$ til ethvert tidspunkt, og egenbølgen $(\omega(k_1), k_1)$ må forventes at blive exciteret. Denne bølge blev ikke exciteret i tilfældet beskrevet i afsnit 5.1. I dette appendiks vil vi undersøge denne bølge nærmere. Til dette formål

antages excitationen at være givet ved et halvuendeligt bølgetog påtrykt til $t = 0$, dvs. \vec{Y} har formen

$$\vec{Y}(t, x) = \vec{J}(t, x) \exp(-i(\omega_1 t - k_1 x)) h(t) h(x) \quad (D.6)$$

Benyttes Laplacetransformationen både i tid og rum som i afsnit 5.1, fås

$$\vec{Y}(\omega, k) = \frac{\vec{J}(\omega, k)}{(\omega - \omega_1)(k - k_1)} + \text{c.c.} \quad (D.7)$$

Som i afsnit 5.1 har vi

$$\vec{E}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{C_k} \int_{C_\omega} \frac{\vec{\Phi}(\omega, k) \exp(-i(\omega t - kx))}{(\omega - \omega_1)(k - k_1) D(\omega, k)} d\omega dk \quad (D.8)$$

hvor $\vec{\Phi}(\omega, k) = ||D|| \text{adj} \cdot \vec{J}(\omega, k)$. Vi skal eksplicit gøre brug af dispersionsrelationens afhængighed af k^2 , dvs.

$$D(\omega, k) = D(\omega, k^2) \quad (D.9)$$

Integration af (D.8) mht. k giver

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, x) = & i \frac{h(x)}{(2\pi)} \int_{C_\omega} \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega - \omega_1} \left[\frac{\vec{\Phi}(\omega, k_1)}{D(\omega, k_1^2)} \exp(ik_1 x) \right. \\ & + \frac{\vec{\Phi}(\omega, k(\omega))}{(k(\omega) - k_1) \left(\frac{\partial D}{\partial k} k(\omega) \right)} \exp(ik(\omega)x) \\ & \left. + \frac{\vec{\Phi}(\omega, -k(\omega))}{(-k(\omega) - k_1) \left(\frac{\partial D}{\partial k} -k(\omega) \right)} \exp(-ik(\omega)x) \right] d\omega \end{aligned} \quad (D.10)$$

Ved integrationen af (D.10) mht. ω får vi brug for residuerne fra følgende poler

$$\begin{aligned}
 \omega - \omega_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_1 \\
 D(\omega, k_1^2) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_+(k_1) \text{ og } \omega = \omega_-(k_1) \\
 k(\omega) - k_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega(k_1) \\
 k(\omega) + k_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega(-k_1)
 \end{aligned}
 \tag{D.11}$$

Ved at bruge relationerne $\omega_+(k_1) = \omega(k_1)$, $\omega_-(k_1) = \omega(-k_1)$ og $dk/d\omega = -(\partial D/\partial \omega)/(\partial D/\partial k)$ finder vi endelig

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(t, x) &= h(x) [h(t) \vec{E}^{(1)} \exp(-i(\omega_1 t - k_1 x)) \\
 &+ h(t - x \frac{dk}{d\omega} \omega_1, k(\omega_1)) \vec{E}^{(2)} \exp(-i(\omega_1 t - k(\omega_1) x)) \\
 &+ (h(t) - h(t - x \frac{dk}{d\omega} \omega(k_1), k_1)) \vec{E}^{(3)} \exp(-i(\omega(k_1) t - k_1 x)) \\
 &+ h(t + x \frac{dk}{d\omega} \omega_1, -k(\omega_1)) \vec{E}^{(4)} \exp(-i(\omega_1 t + k(\omega_1) x))]
 \end{aligned}
 \tag{D.12}$$

hvor

$$\vec{E}(1) = \frac{\vec{\phi}(\omega_1, k_1)}{D(\omega_1, k_1^2)}$$

$$\vec{E}(2) = \frac{\vec{\phi}(\omega_1, k(\omega_1))}{(k(\omega_1) - k_1) \left(\frac{\partial D}{\partial k} \right)_{\omega_1, k(\omega_1)}}$$

(D.13)

$$\vec{E}(3) = \frac{\vec{\phi}(\omega(k_1), k_1)}{(\omega(k_1) - \omega_1) \left(\frac{\partial D}{\partial k} \right)_{\omega(k_1), k_1}}$$

$$\vec{E}(4) = \frac{\vec{\phi}(\omega_1, -k(\omega_1))}{-(k(\omega_1) + k_1) \left(\frac{\partial D}{\partial k} \right)_{\omega_1, -k(\omega_1)}}$$

Det sidste led i (D.12) repræsenterer en bølge, der udbreder sig i den negative x-retning. Nær ved resonans, dvs. $D(\omega_1, k_1^2) = 0$, har denne bølge en meget lille amplitude og kan negligeres, som nævnt i afsnit 5.1. Det andet led er egenbølgen, der repræsenterer svaret på drivleddet taget som et sæt af randbetingelser, mens det tredje led er svaret på drivleddet taget som et sæt af begyndelsesbetingelser. Bemærk at disse to bølger er rumligt adskilte, idet det ses af løsningen (D.12), at den tredje bølge vil starte med at udbrede sig med gruppehastigheden $(d\omega/dk)_{\omega(k_1), k_1}$ fra randen $x = 0$ til $t = 0$, mens den anden bølge til $t = 0^+$ er tilstede overalt for $x > 0$, hvorefter bagenden af denne bølge vil bevæge sig væk fra $x = 0$ med gruppehastigheden $(d\omega/dk)_{\omega_1, k(\omega_1)} > (d\omega/dk)_{\omega(k_1), k_1}$.

APPENDIX E

Ved løsningen af ligningerne (7.2) og (7.3) benytter vi et centralt differensskema. Det vil sige, at de partielle afledede erstattes af centrale differensstilnærmelser på følgende måde. Idet A repræsenterer en af de afhængige variable

$$\frac{\partial}{\partial t} A \approx [A(t+\Delta t, x) - A(t-\Delta t, x)] / (2\Delta t) \quad (E.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A \approx [A(t+\Delta t, x) - 2A(t, x) + A(t-\Delta t, x)] / (\Delta t)^2 \quad (E.2)$$

hvor Δt betegner tidsskridtet (den tidslige opløsning). På tilsvarende måde tilnærmes de afledede mht. x , hvor Δx betegner det rumlige skridt (den rumlige opløsning). Ved nu at skrive de afhængige variable som

$$E(m\Delta t, n\Delta x) = R_n^m + iI_n^m \quad (E.3)$$

$$N(m\Delta t, n\Delta x) = N_n^m \quad (E.4)$$

og indføre konstanterne

$$V = \frac{\Delta t}{\Delta x} v \quad ; \quad P = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} v' \quad ; \quad H = \Delta t Q \quad ; \quad (E.5)$$

$$Y = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \quad ; \quad F = (2 - (\Delta t)^2 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2) \quad ;$$

er differensskemaet givet ved

$$\begin{aligned} R_n^{m+1} &= R_n^{m-1} - V(R_{n+1}^m - R_{n-1}^m) - P(I_{n+1}^m + I_{n-1}^m) \\ &\quad + 2(P + HN_n^m)I_n^m \end{aligned} \quad (E.6)$$

$$\begin{aligned} I_n^{m+1} &= I_n^{m-1} - V(I_{n+1}^m - I_{n-1}^m) + P(R_{n+1}^m + R_{n-1}^m) \\ &\quad - 2(P + HN_n^m)R_n^m \end{aligned} \quad (E.7)$$

$$\begin{aligned} N_n^{m+1} &= -N_n^{m-1} + FN_n^m + YN_{n-1}^m + Y((R_{n+1}^m)^2 \\ &\quad - 2(R_n^m)^2 + (R_{n-1}^m)^2 \\ &\quad + (I_{n+1}^m)^2 - 2(I_n^m)^2 + (I_{n-1}^m)^2) \end{aligned} \quad (E.8)$$

Det er muligt at gennemføre en lineær stabilitetsanalyse af det fundne differensskema. Vi vil her gøre som Yajima m.fl. (1975). Ulineære led lineariseres på følgende måde: $NR = N_0R_0 + N_0R + NR_0$, $R^2 = R_0^2 + 2R_0R$, og på tilsvarende måde for de øvrige ulineære led. En Fouriertransformation mht. x af det endelige differensskema vil betyde, at de afhængige variable transformerer som

$$\begin{aligned} A(t, x) &\rightarrow A(t) \exp(iKx) \\ A(t \pm \Delta t, x) &\rightarrow A(t \pm \Delta t, x) \exp(iKx) \\ A(t \pm \Delta t, x \pm \Delta x) &\rightarrow A(t \pm \Delta t, x) \exp(iKx) \exp(\pm iK\Delta x) \end{aligned} \quad (E.9)$$

Efter division med $\exp(iKx)$, kan de resulterende ligninger skrives på formen

$$\vec{A}(t + \Delta t) = ||T|| \cdot \vec{A}(t) \quad (E.10)$$

hvor \vec{A} betegner

$$\vec{A}(t) = \begin{bmatrix} R(t) \\ I(t) \\ N(t) \\ R(t-\Delta t) \\ I(t-\Delta t) \\ N(t-\Delta t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

og $||T||$ betegner transformationsmatricen. Hvis vi indfører

$$\alpha = 2v \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(K\Delta x)$$

$$\beta = 4v' \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(K\Delta x/2) \quad (\text{E.12})$$

$$\gamma = 2Q\Delta t$$

$$\theta = 8 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(K\Delta x/2)$$

$$\tau = 2 - (\Delta t)^2 - 4 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(K\Delta x/2)$$

er $||T||$ givet ved

$$||T|| = \begin{pmatrix} -ia & (\beta + \gamma N_O) & \gamma I_O & 1 & 0 & 0 \\ -(\beta + \gamma N_O) & -ia & -\gamma R_O & 0 & 1 & 0 \\ -\theta R_O & -\theta I_O & \tau & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (E.13)$$

De komplekse egenverdier λ_i hørende til $||T||$ er bestemt ved

$$\det(||T|| - \lambda ||I||) = 0 \quad (E.14)$$

hvor $||I||$ er enhedsmatricen. Dette er en 6. grads ligning i λ , der lyder

$$\begin{aligned} \lambda^6 + (-\tau + 2ia)\lambda^5 + ((\beta + \gamma N_O)^2 - 1 - a^2 - 2ia\tau)\lambda^4 \\ - (((\beta + \gamma N_O)^2 - a^2 - 2)\tau + (\beta + \gamma N_O)\theta\gamma(R_O^2 + I_O^2))\lambda^3 \\ + ((\beta + \gamma N_O)^2 - 1 - a^2 + 2ia\tau)\lambda^2 - (\tau + 2ia)\lambda + 1 = 0 \end{aligned} \quad (E.15)$$

Egenverdierne kan nu for givet Δx , Δt , K , N_O , R_O og I_O findes ved en numerisk løsning af (E.15). Skemaet er stabilt, hvis det for alle egenverdierne gælder at $|\lambda_i| < 1$, marginalt stabilt, hvis det for en eller flere gælder at $|\lambda_i| = 1$, og ustabil, hvis det bare for en gælder at $|\lambda_i| > 1$. I vores tilfælde gælder det, at skemaet højst kan være marginalt stabilt, se f.eks. fig. 5 side 68.

APPENDIKS F

I tabel F.1 er vist parametrene for de ekstra figurer, vi har valgt at medtage i dette appendiks. På figurerne 1.a, b og c ser vi, at endelige gittereffekter giver anledning til dispersive oscillationer i modulus af E ($v' = 0$, $Q = 0$). På figurerne 2.a og b ses ligeledes, hvordan endelige gittereffekter træder frem, når T_r mindskes for fastholdt Δx . Hvis v vælges for lille i forhold til $\Delta x/\Delta t$ træder disse også frem, hvilket ses af figurerne 3.a, 1.b og 3.b. I figurerne 4.a, b og c ses, hvorledes vi selv kan fremkalde de dispersive oscillationer ved at øge v' . Læg iøvrigt mærke til, at i disse kørsler fremgår det meget klart, at de dele af bølgefronten med de hurtigste variationer i fassen løber forrest.

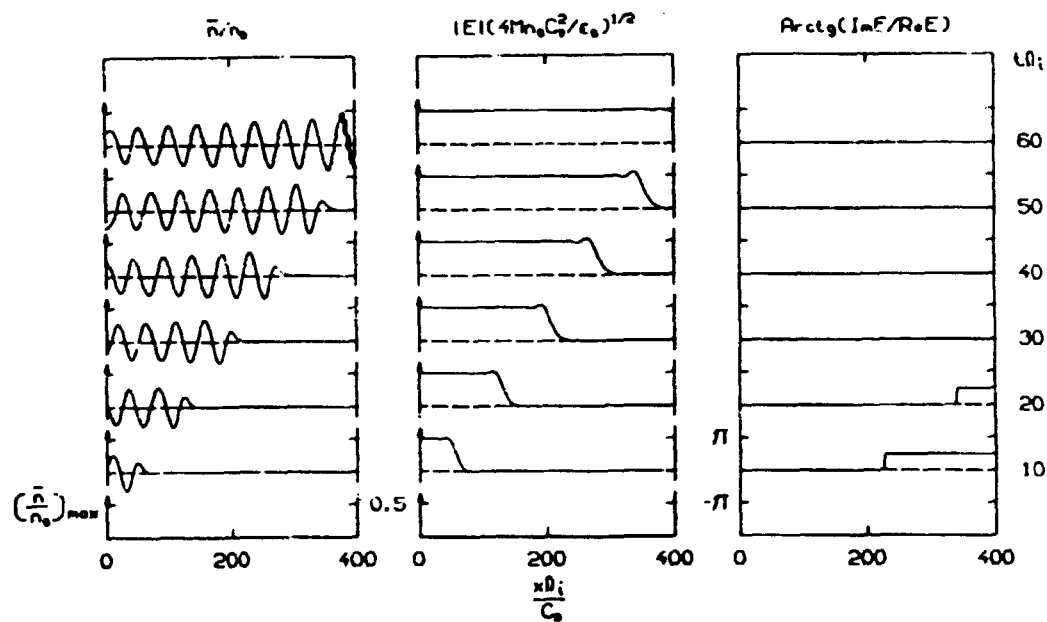
I figurerne 5.a og b ses, hvorledes fassen modificeres, når vi øger Q ($v' = 0$). Effekten af at variere v' for $Q \neq 0$ ses i figurerne 6.a, b, c og d. Det ses, at modulationinstabiliteten er kraftigere jo større v' . Øger vi E_0 og varierer v' som før, fås 7.a, b, c og d, og øges E_0 yderligere får vi for det største v' fig. 8.a. Vi ser her, at bølgen er over "100%" moduleret. Endelig ser vi af figurerne 9.a og b, at en formindskelse af v også giver anledning til en øget modulation. I fig. F.2 har vi iøvrigt vist, hvorledes $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ varierer m.h.t. T_r for forskellige kørsler ($v' = 0$, $Q = 0$). Det ses, at $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ falder næsten lineært for $T_r > 2$. Variationen af $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ m.h.t. v' ($Q = 0$) er vist i fig. F.3. For store v' stiger $(\bar{n}/n_0)_{\max}$, fordi dispersive effekter gør, at modulus af E overstiger E_0 i nærheden af bølgefronten. Det ses da også klart af fig. F.4, at $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ vokser proportionalt med kvadratet af E_0 ($Q = 0$).

Tabel F.1.

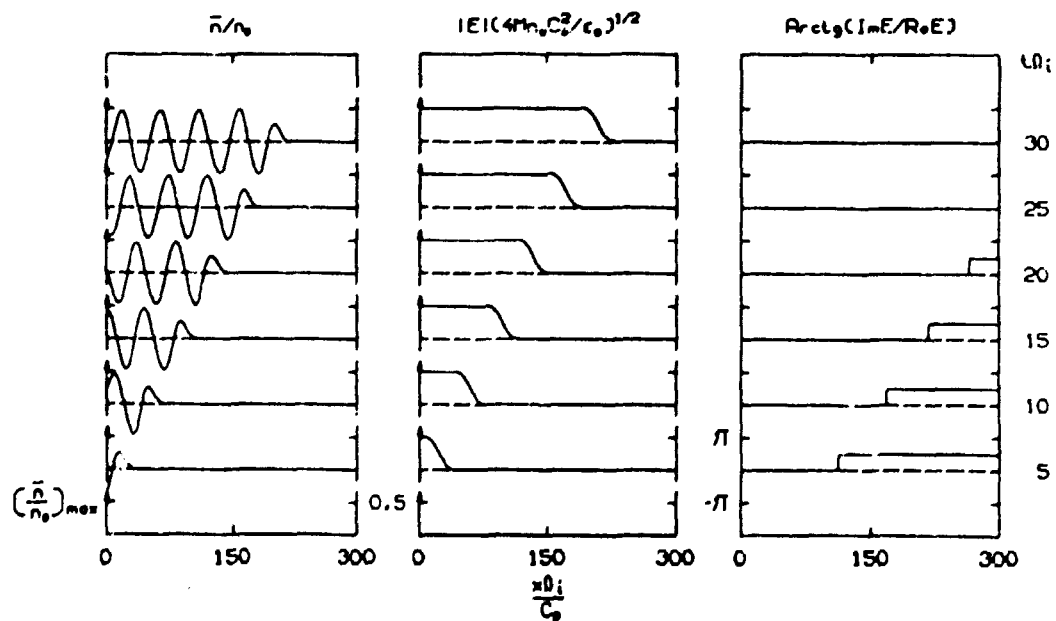
Figur	Δt	Δx	T_r	E_0	v	v'	Q	$(\bar{n}/n_0)_{\max}$
1.a	10^{-2}	2	4	0.5	7.5	0	0	6.57×10^{-3}
1.b	-	1	-	-	-	-	-	3.76×10^{-3}
1.c	-	0.5	-	-	-	-	-	3.71×10^{-3}
2.a	-	-	2	-	-	-	-	4.79×10^{-3}
2.b	-	-	1	-	-	-	-	5.78×10^{-3}
3.a	-	-	4	-	5	-	-	9.27×10^{-3}
3.b	-	-	-	-	10	-	-	2.02×10^{-3}
4.a	-	-	-	-	7.5	5	-	3.74×10^{-3}
4.b	-	-	-	-	-	10	-	4.22×10^{-3}
4.c	-	-	-	-	-	20	-	6.38×10^{-3}
5.a	-	-	-	-	-	0	1.25	3.76×10^{-3}
5.b	-	-	-	-	-	-	5	3.75×10^{-3}
6.a	-	-	-	-	-	1	1.25	3.69×10^{-3}
6.b	-	-	-	-	-	5	-	4.40×10^{-3}
6.c	-	-	-	-	-	10	-	6.11×10^{-3}
6.d	-	-	-	-	-	20	-	1.30×10^{-2}
7.a	-	-	-	0.75	-	1	-	8.58×10^{-3}
7.b	-	-	-	-	-	5	-	1.34×10^{-2}
7.c	-	-	-	-	-	10	-	2.12×10^{-2}
7.d	-	-	-	-	-	20	-	6.04×10^{-2}
8.a	-	-	-	1.0	-	20	-	2.64×10^{-1}
9.a	-	-	-	0.5	5	10	-	1.08×10^{-1}
9.b	-	-	-	-	10	-	-	2.29×10^{-3}

I tabellen er der markeret med "-", når den pågældende størrelse er uændret.

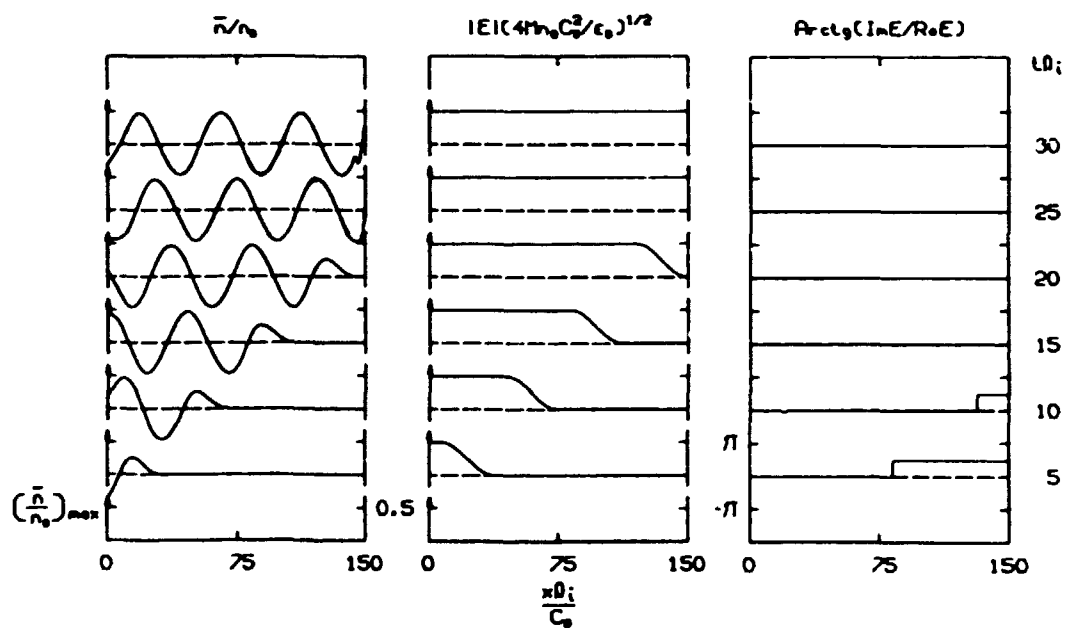
1a



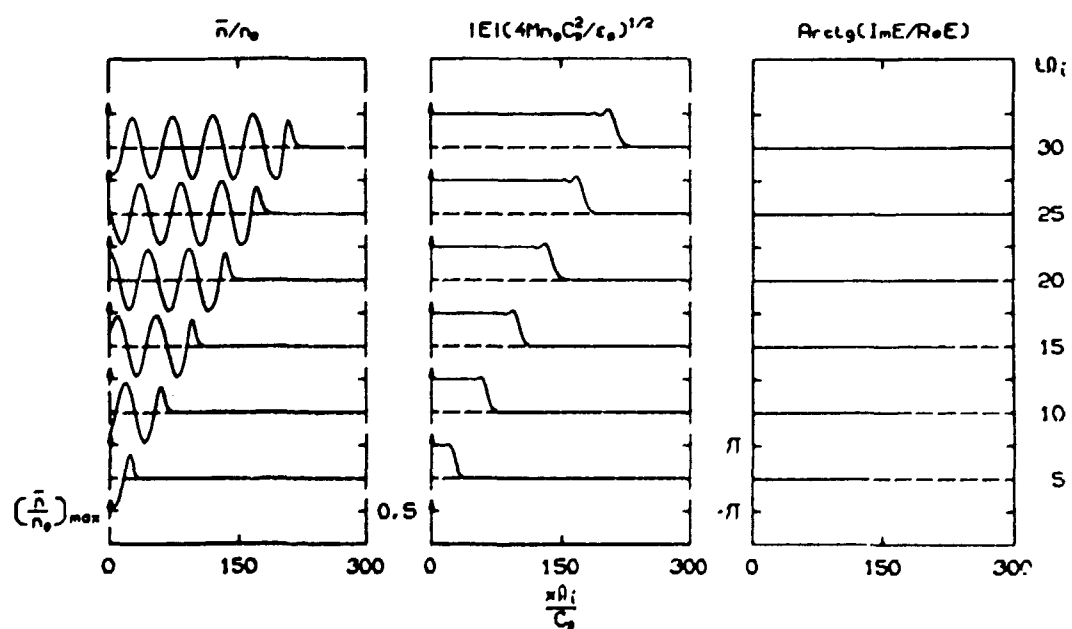
1.b



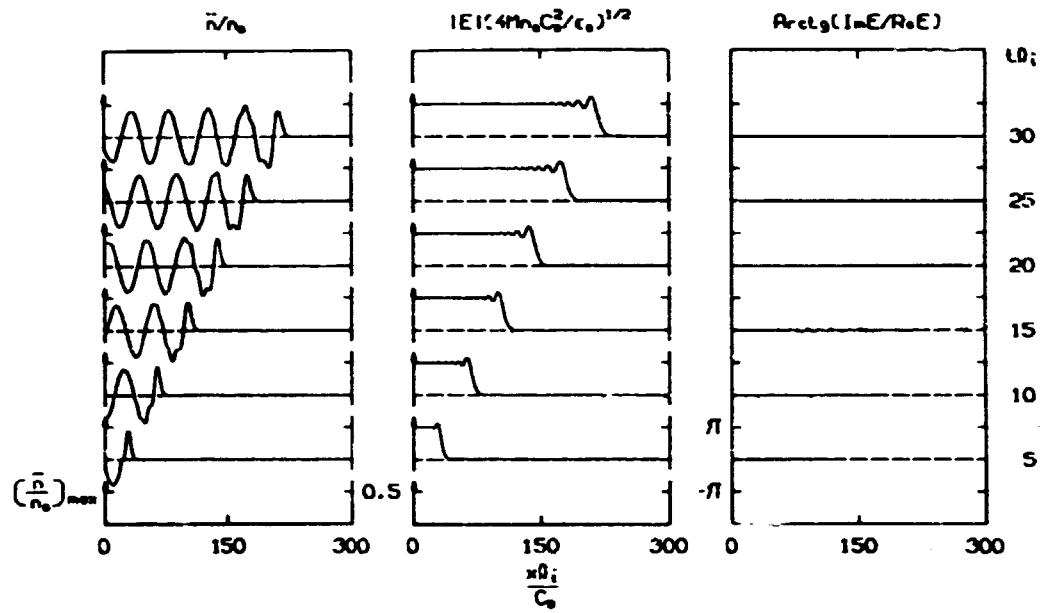
1c



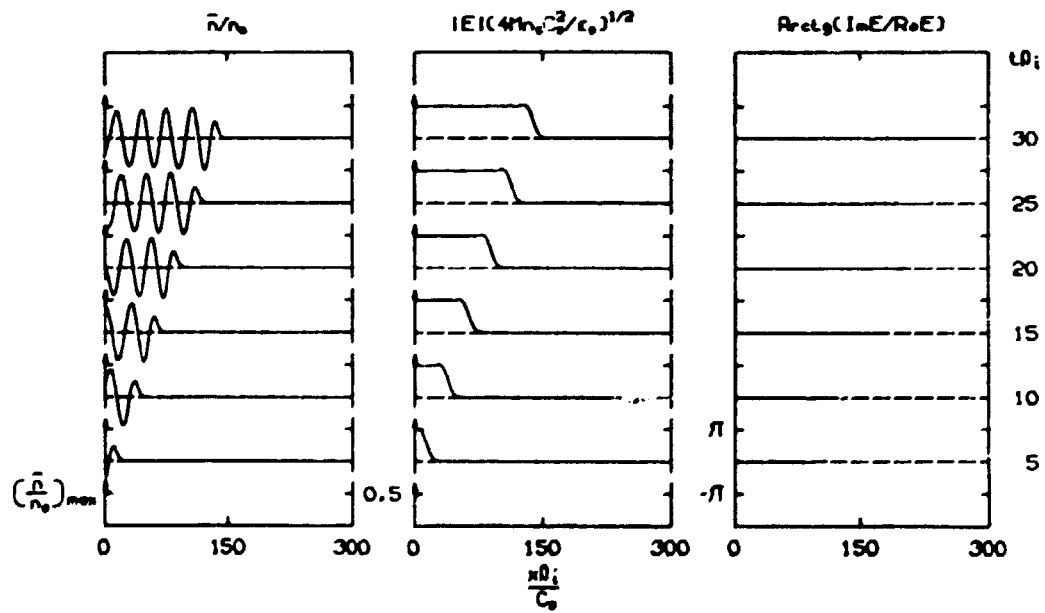
2.a



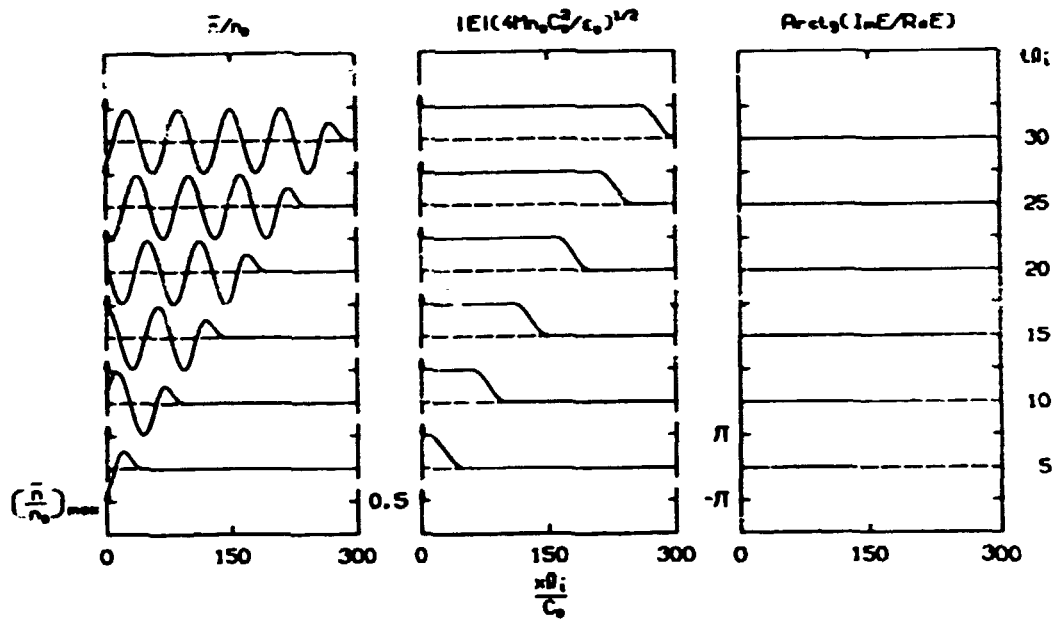
2.b



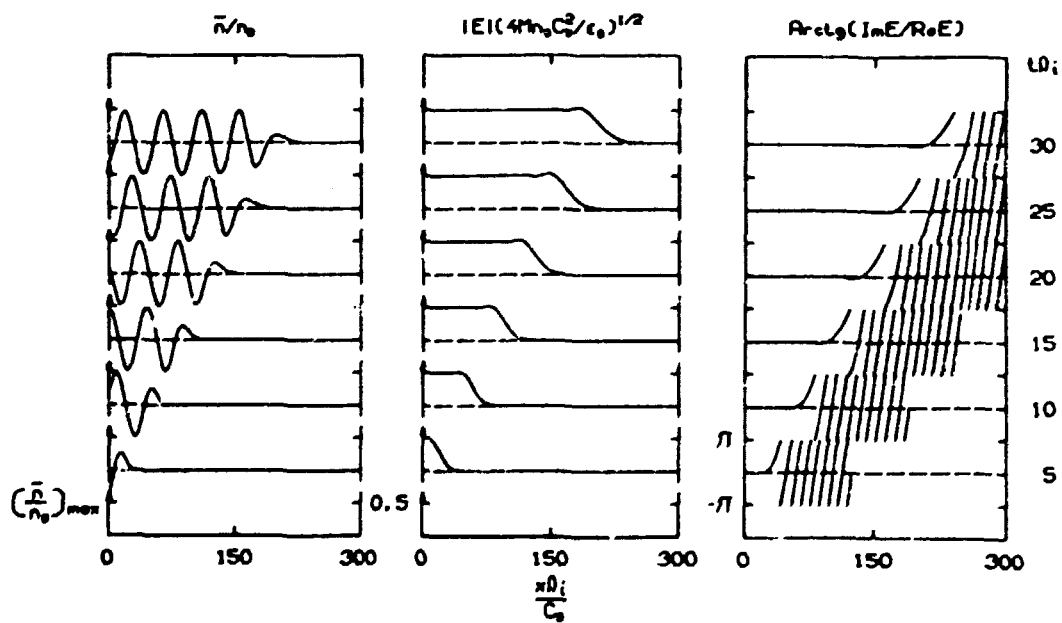
3.a



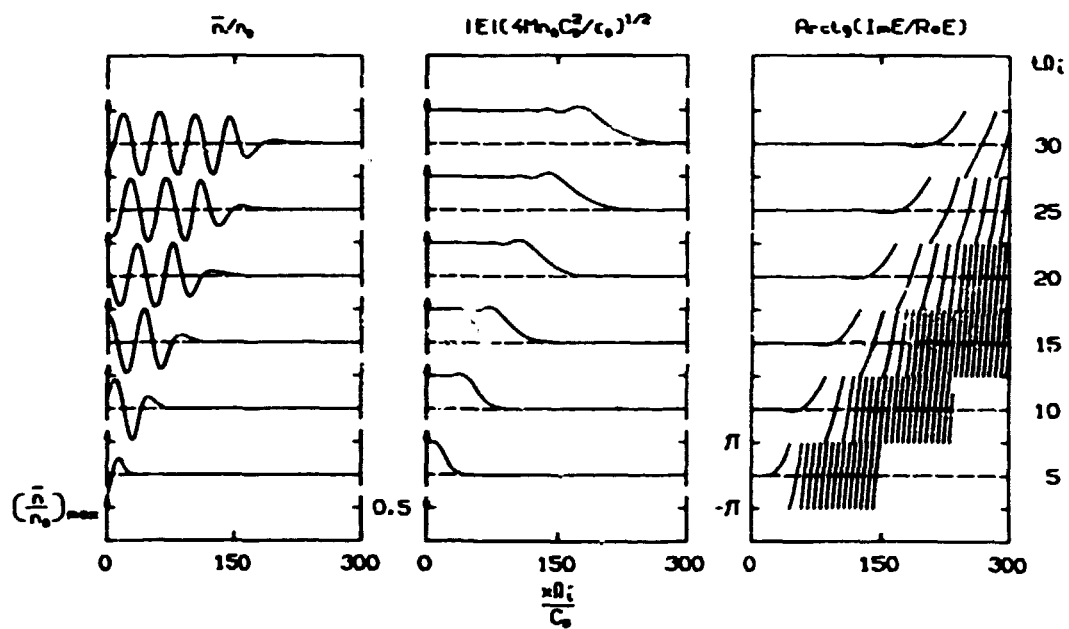
3.b



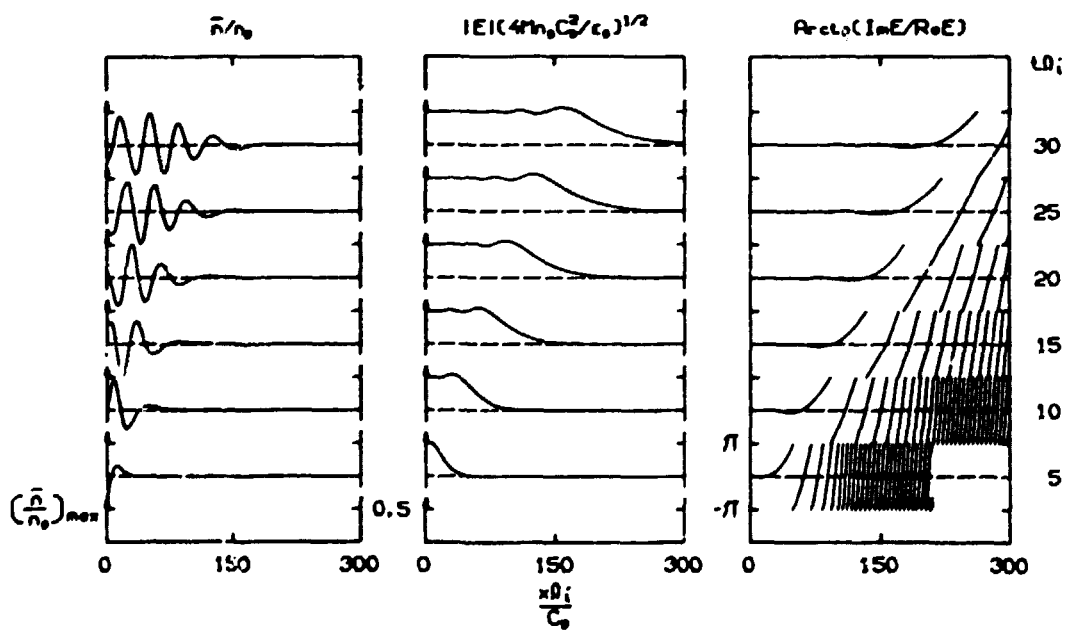
4.a



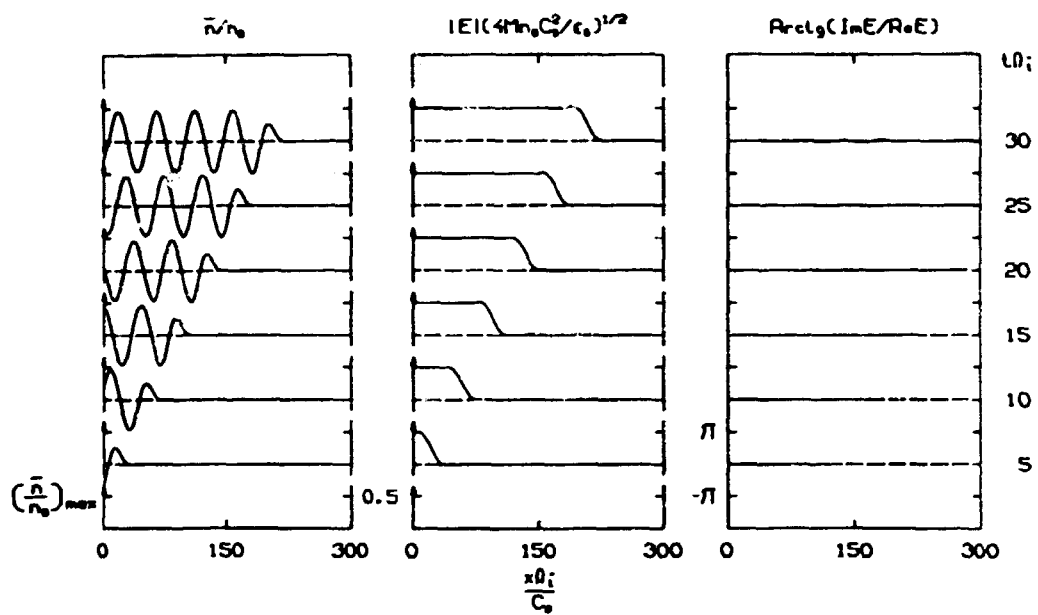
4.b



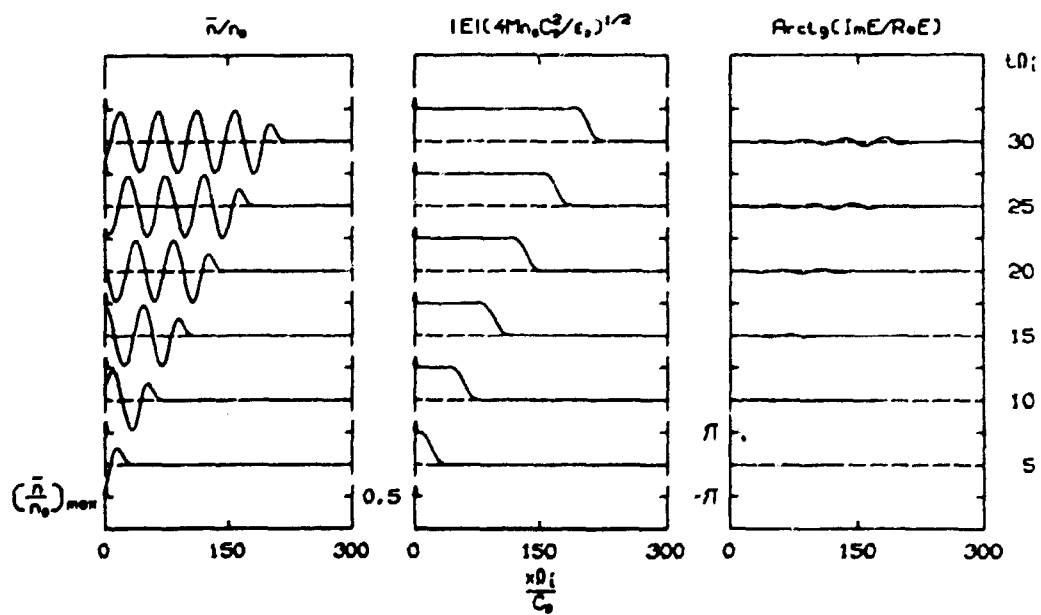
4.c



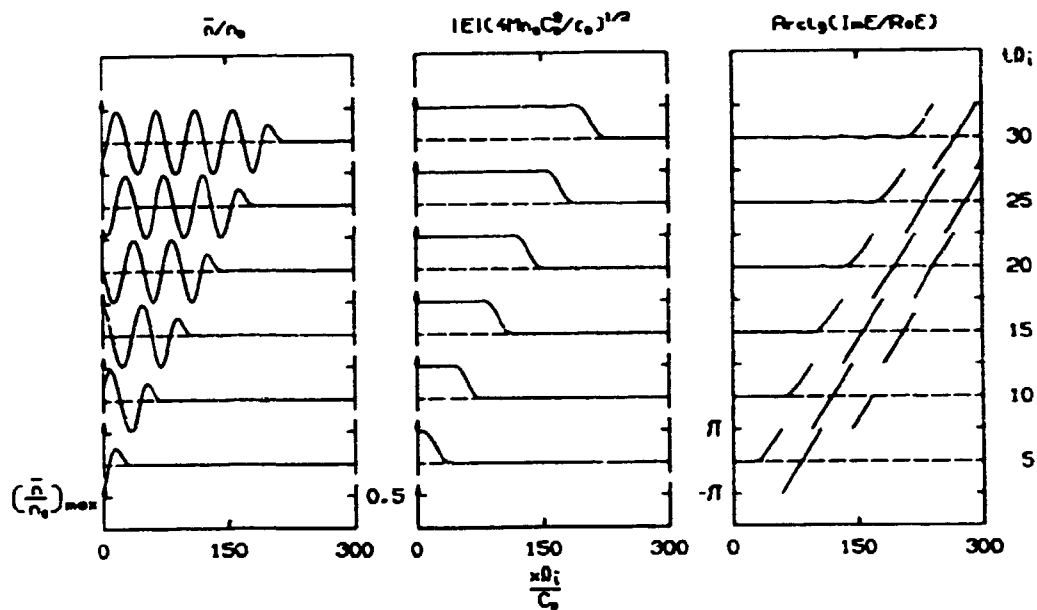
5.a



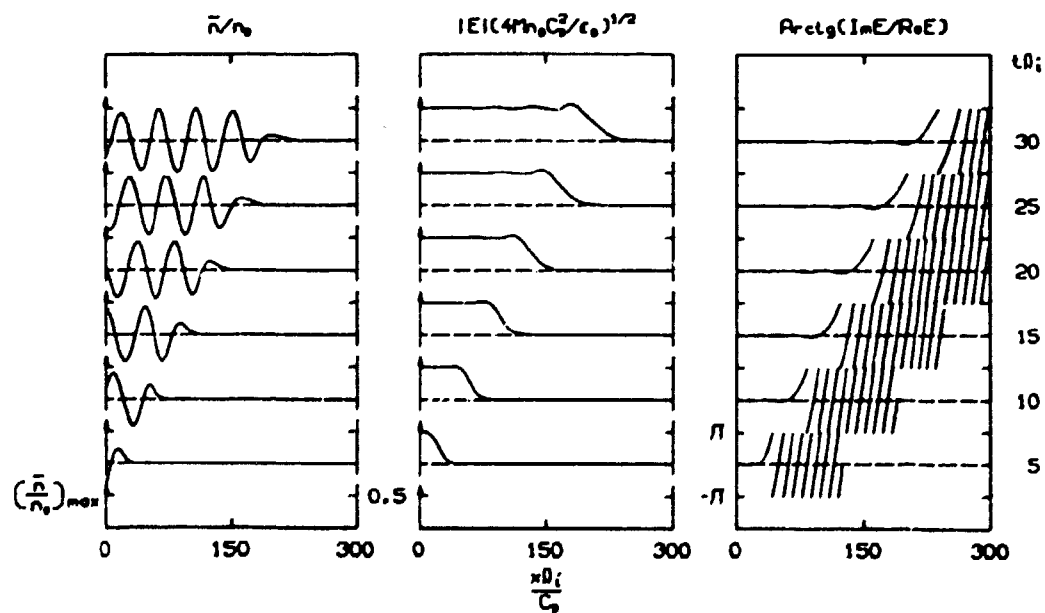
5.b



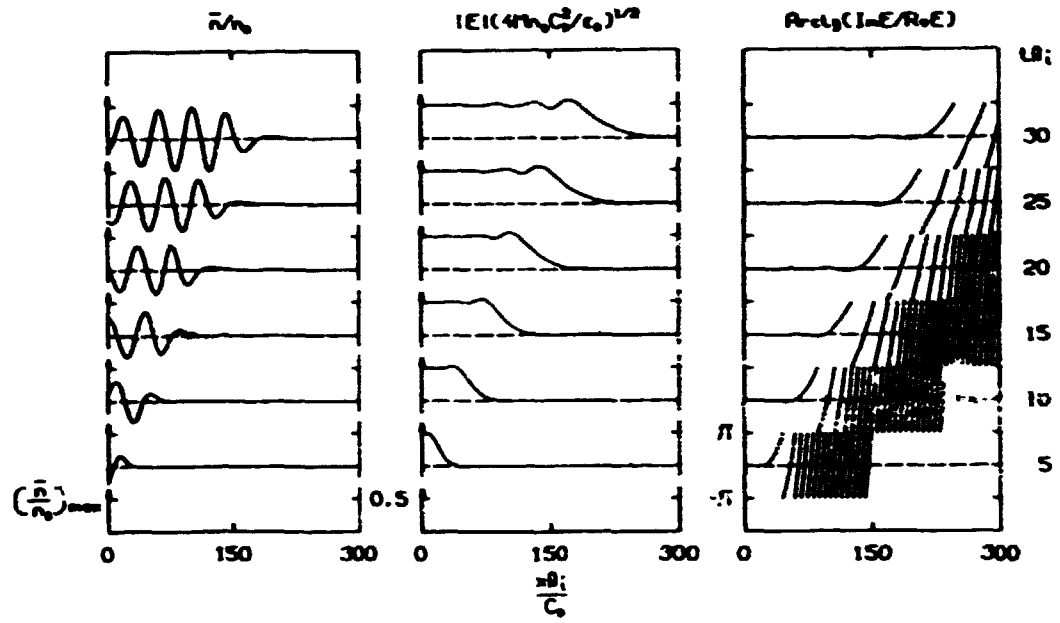
6.a



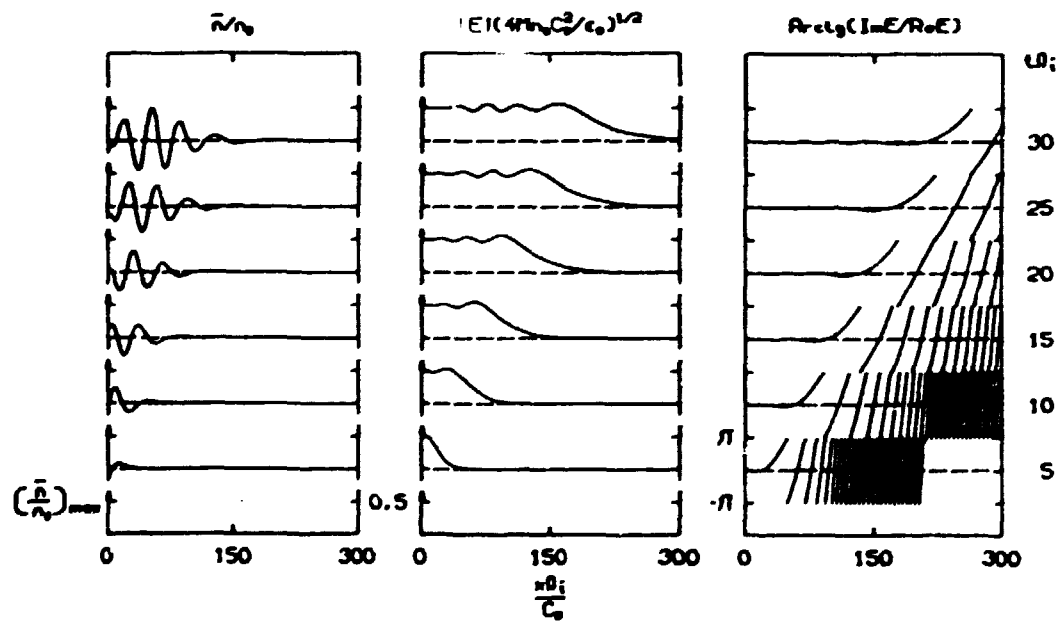
6.b



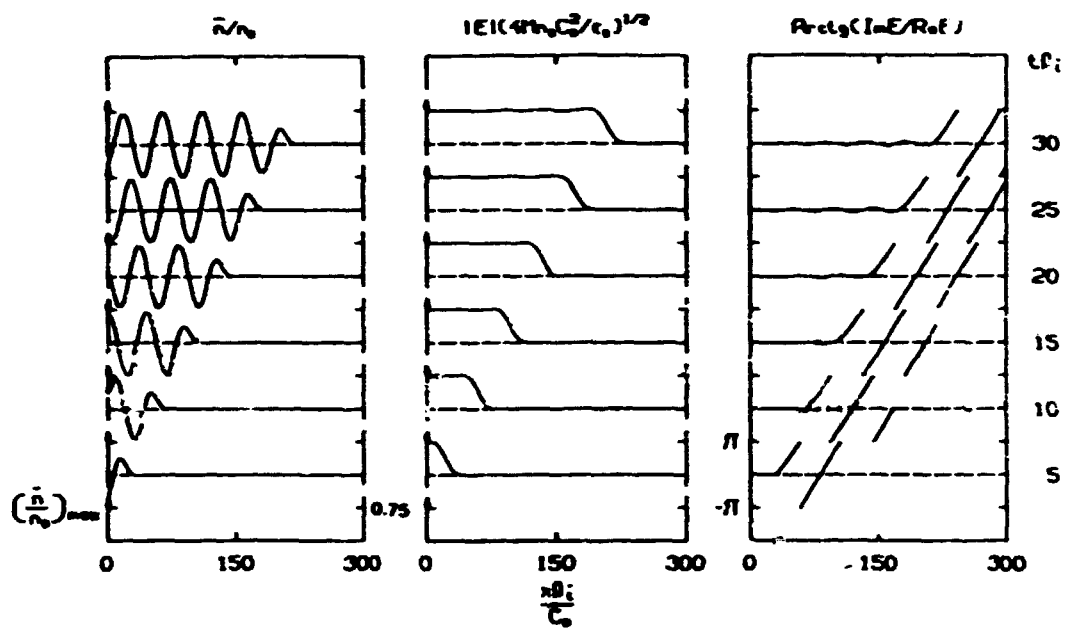
6c



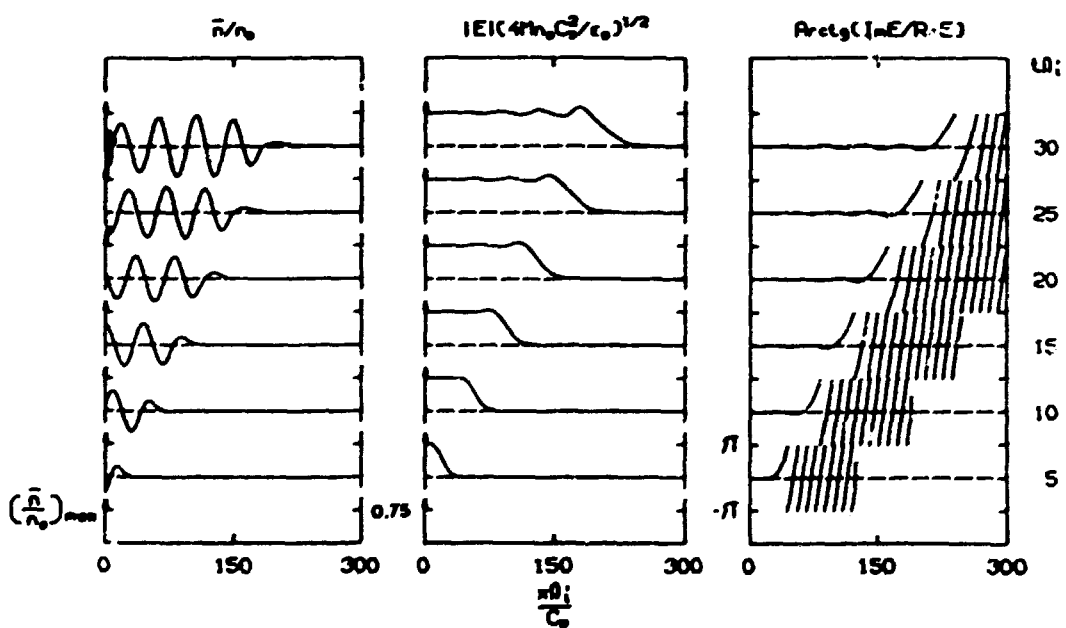
6d



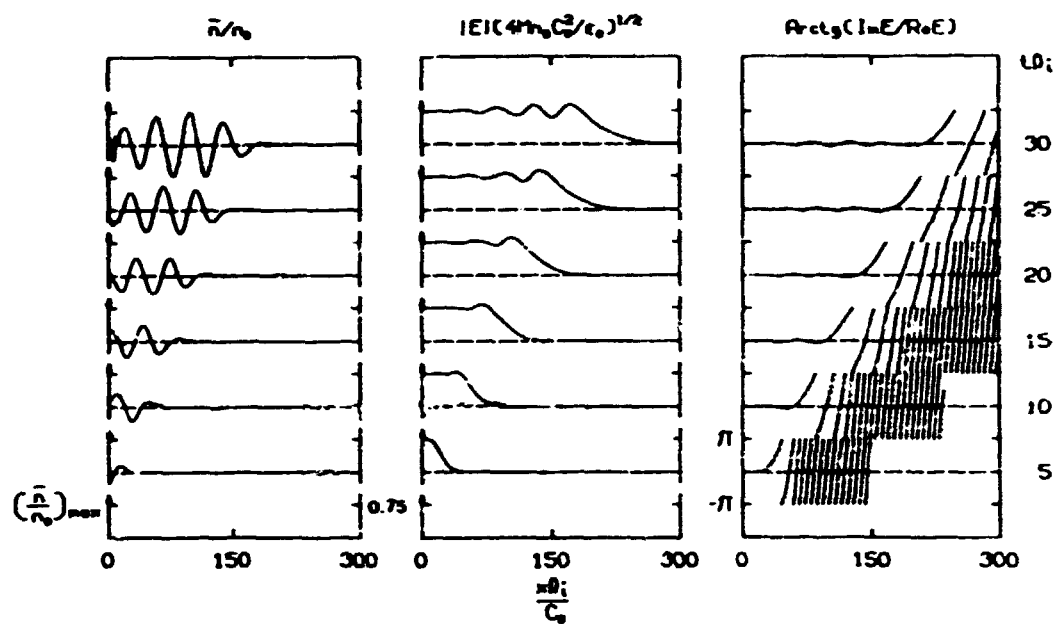
7.a



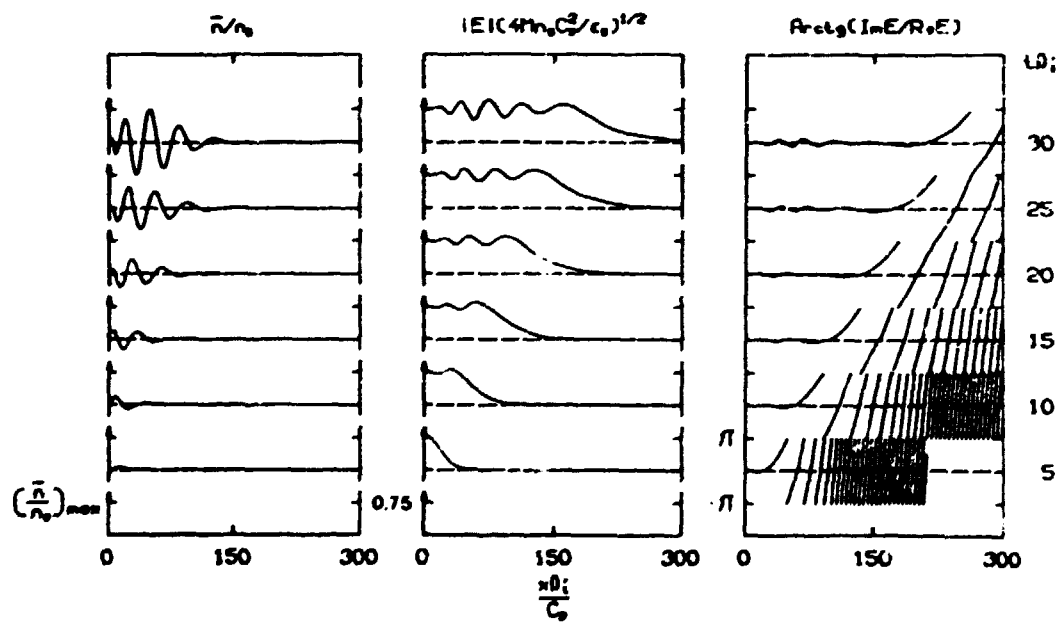
7.b



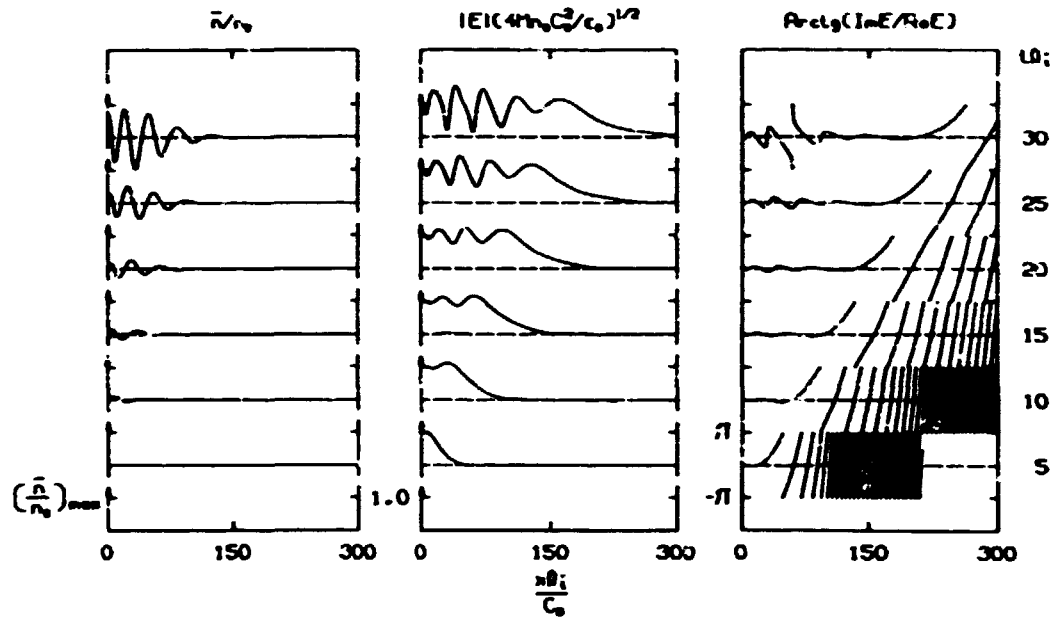
7.c



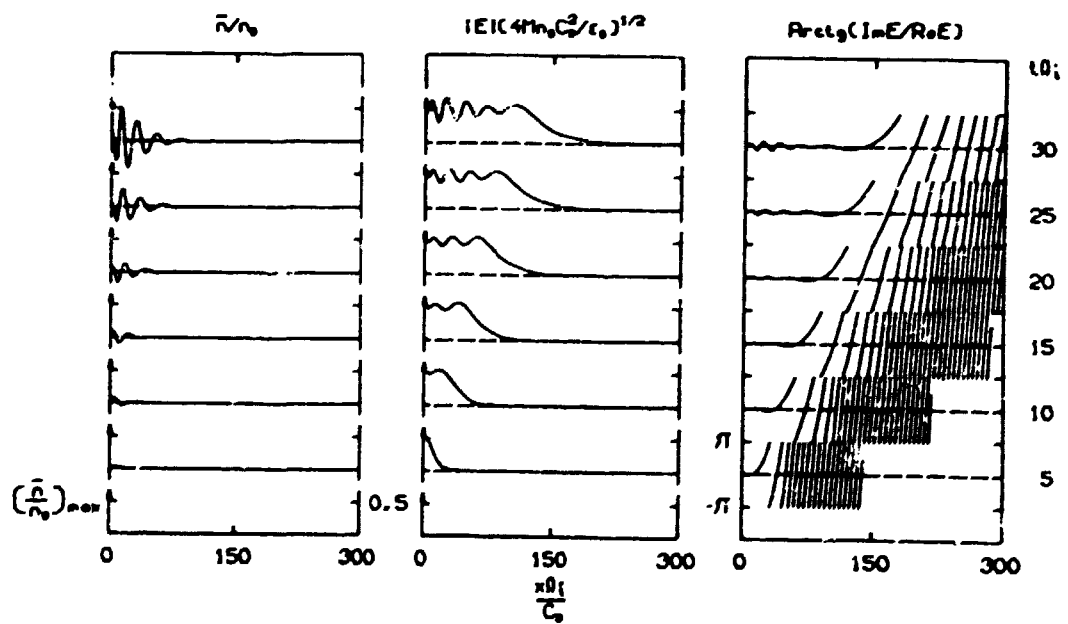
7.d



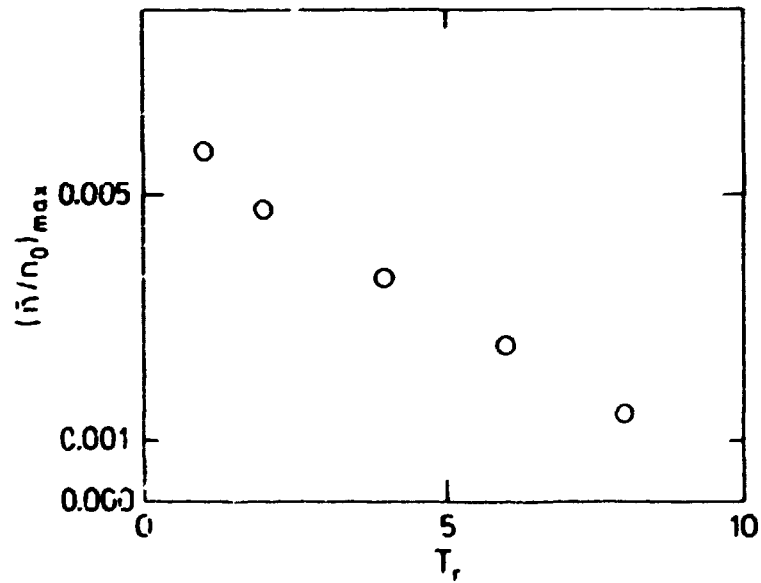
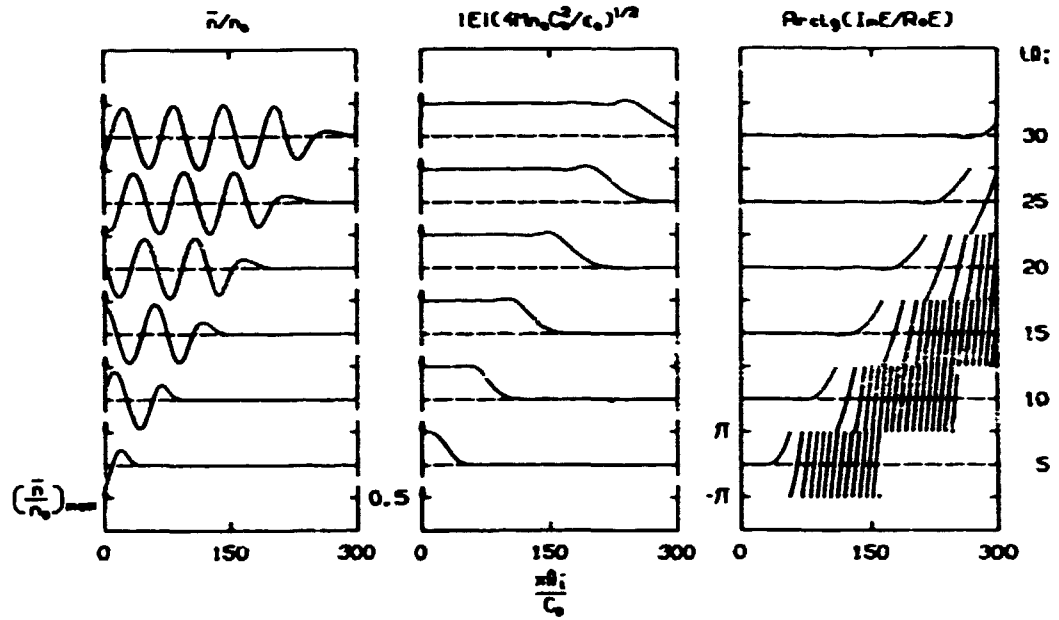
8.a



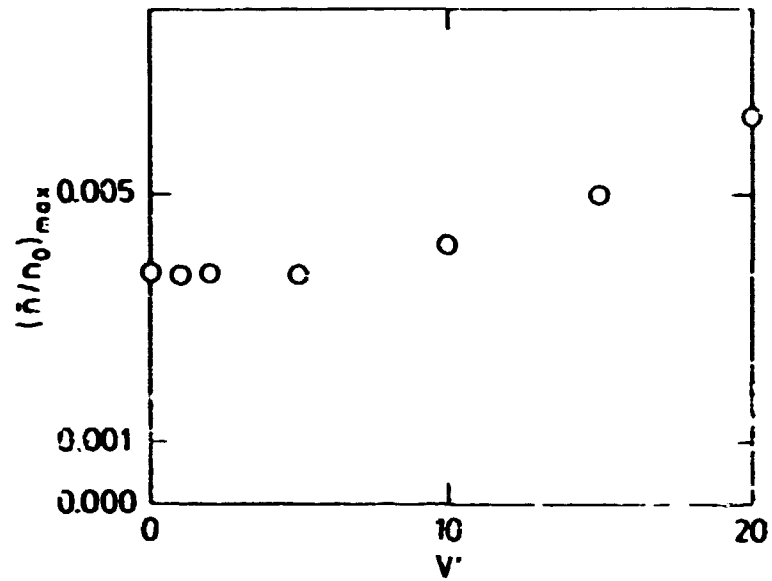
9.a



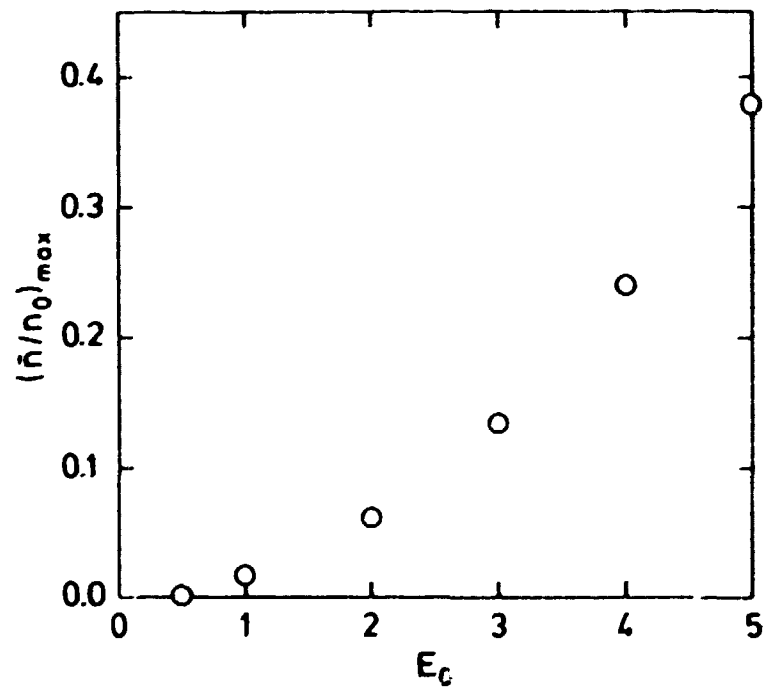
9b



Figur P.2. Variation af $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ mht. Stigtiden T_r for $Q = 0$, $E_0 = 0.5$, $v = 7.5$ og $v' = 0$.



Figur F.3. Variationen af $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ mht. den afledede af gruppehastigheden v' for $Q = 0$, $E_0 = 0.5$, $v = 7.5$ og $T_r = 4$.



Figur F.4. Variationen af $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ mht. amplituden E_0 for $Q = 0$, $v = 7.5$, $v' = 0$ og $T_r = 4$.

APPENDIKS G

I kapitel 6 understregede vi, at en eventuel tæthedsperturbation beskrevet ved ionakustiske bølger var vidt forskellig fra perturbationer beskrevet som elektrostatiske ioncyklotron bølger eller elektrostatiske nedrehybrid bølger. For samtidigt at kunne sammenligne med resultaterne i kapitel 7 og app. F har vi derfor valgt her specielt at betragte udbredelsen af elektrostatiske øvrehybrid bølger. Dette problem er beskrevet ved de koblede ligninger (2.52) og (2.53). Benyttet de samme normeringer som i (7.1) kan disse ligninger skrives som

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E + \frac{1}{2}v'\frac{\partial^2}{\partial x^2}E = QNE \quad (G.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)N = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(|E|^2 - \langle |E|^2 \rangle) \quad (G.2)$$

Ved blot at fjerne leddet N på venstre side af ligning (7.3) kan vi altså bruge det samme program, som blev brugt ved den numeriske løsning i kapitel 7. Da de ionakustiske bølger ikke har en karakteristisk frekvens, der definerer en langsom tidsskala, benyttes normalt en anden normering end (7.1), se f.eks. Rypdal m.fl. (1982). Ved at benytte (7.1) har vi altså selv indført en langsom tidsskala karakteriseret ved $1/Q_i$. Som i kapitel 7 har vi valgt parametre, som demonstrerer de grundlæggende egenskaber ved ligningerne (G.1) og (G.2). I tabel G.1 er vist parametrene for de løsninger, vi har valgt at medtage. Figur 1.A viser en slags standardkørsel ($v' = 0$, $Q = 0$) udfra hvilken, vi kan sammenligne effekten af at variere E_0 , v , v' og Q . Det ses, at tæthedssvarets form er godt beskrevet ved $|E|^2/(v^2-1)$, som forudsagt i kapitel 6 ligning (6.10). Endvidere er oscillationerne stammende fra endelige gittereffekter små. I fig. 2.A er $v' = 10$ og vi ser tydelige oscillationer i både $|E|$ og \bar{n}/n_0 som

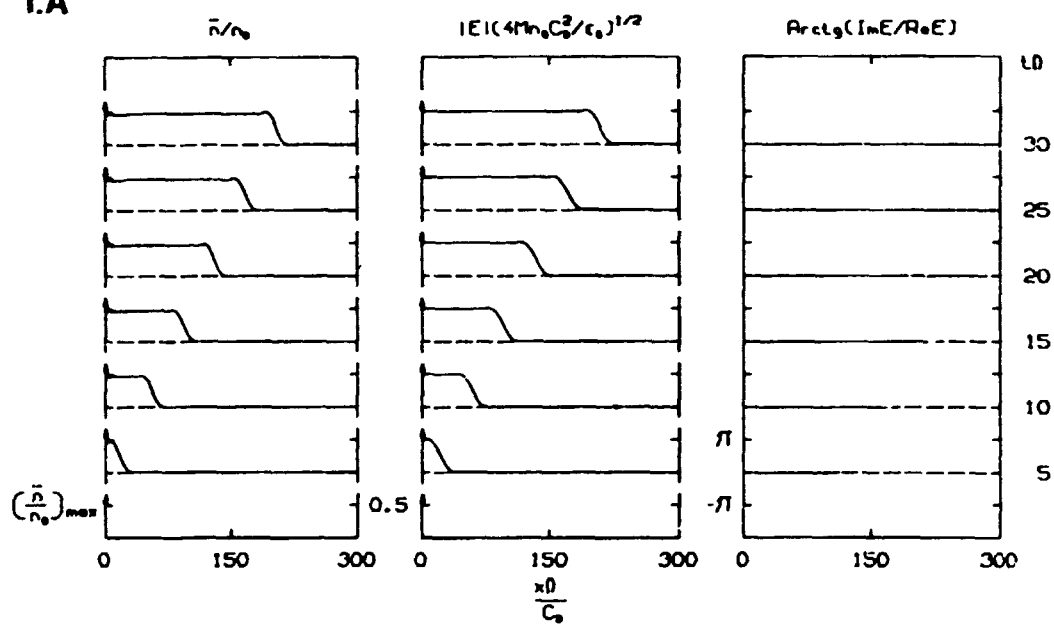
forventet. Ved istedet at sætte $Q = 5$ fås fig. 3.A. da der sker en jævn perturbation af tætheden, ses det her tydeligt i fasen af E , at tilbagekoblingen giver anledning til et ulineært bølgetalsskift jævnfør diskussionen i afsnit 4.3. I figurerne 4.A - 4.D ses effekten af at øge v' i det fulde ulineære problem. Som forventet bliver de disperse oscillationer større jo større v' , medens der kun sker en mindre modifikation af fasen af E . Figurerne 5.A - 5.D viser igen effekten af at øge v' , men for et større E_0 . Det ulineære bølgetalsskift er som forventet større. Randbetingelsen for \bar{n}/n_0 i $x = 0$ exciterer åbenbart også her den kortbølgede instabilitet, så disse løsninger skal tages med et vist forbehold. Endelig er effekten af at variere v vist i figurerne 6.A og 6.B. Den kortbølgede instabilitet er åbenbart nemmere at excitere jo mindre v , men ses der bort fra denne, er tæthedsperturbationen større jo mindre v ($v > 1$) i overensstemmelse med $\bar{n}/n_0 = |E|^2/(v^2-1)$. Ved at afbilde $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ (de disperse oscillationer er negligeret) som funktion af v for fastholdte værdier af de andre parametre fås fig. G.2, hvor vi også har indtegnet $E_0^2/(v^2-1)$. Afbilder vi i stedet $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ som funktion af E_0 , fås fig. G.3, hvor også $E_0^2/(v^2-1)$ er indtegnet. Det ses i begge tilfælde, at der er en fin overensstemmelse, hvilket jo øger tilliden til vores numeriske resultater fundet her og i kapitel 7.

Tabel G.1.

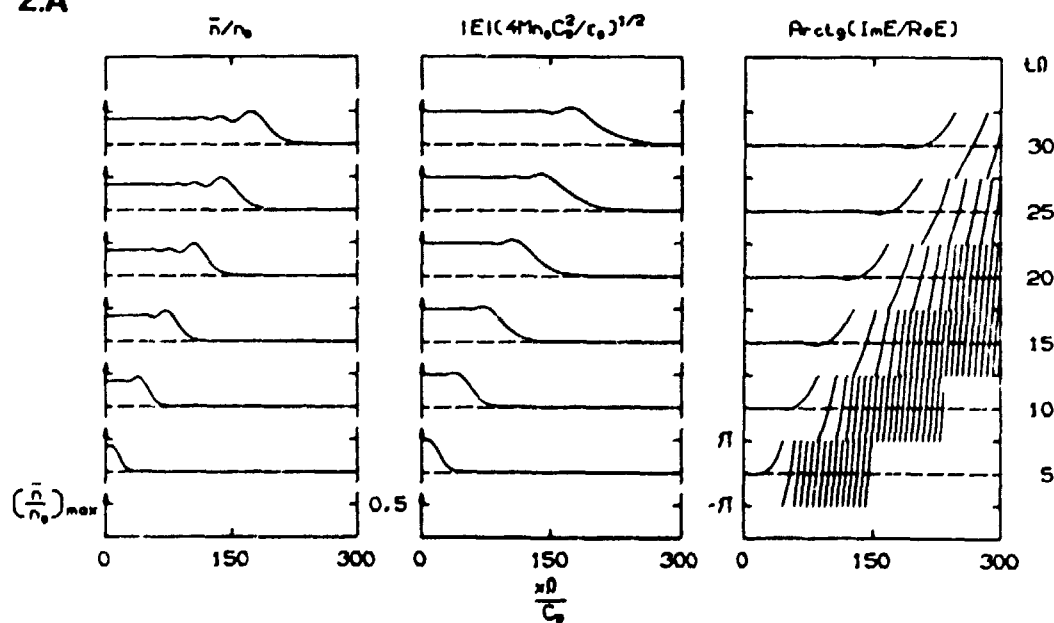
Figur	E_0	v	v'	Q	$(\bar{n}/n_0)_{\max}$
1.A	0.5	7.5	0	0	4.80×10^{-3}
2.A	-	-	10	0	5.82×10^{-3}
3.A	-	-	0	5	4.81×10^{-3}
4.A	-	-	1	1.25	4.69×10^{-3}
4.B	-	-	5	-	5.29×10^{-3}
4.C	-	-	10	-	5.72×10^{-3}
4.D	-	-	20	-	6.19×10^{-3}
5.A	1.0	-	1	-	2.26×10^{-2}
5.B	-	-	5	-	3.08
5.C	-	-	10	-	4.21
5.D	-	-	20	-	2.19
6.A	0.5	5.0	10	-	3.12×10^{-2}
6.B	-	10.0	-	-	3.03×10^{-3}

I alle tilfælde er $\Delta t = 10^{-2}$, $\Delta x = 1$ og $T_r = 4$.
I tabellen er der markeret med "-", når den pågældende størrelse er uændret.

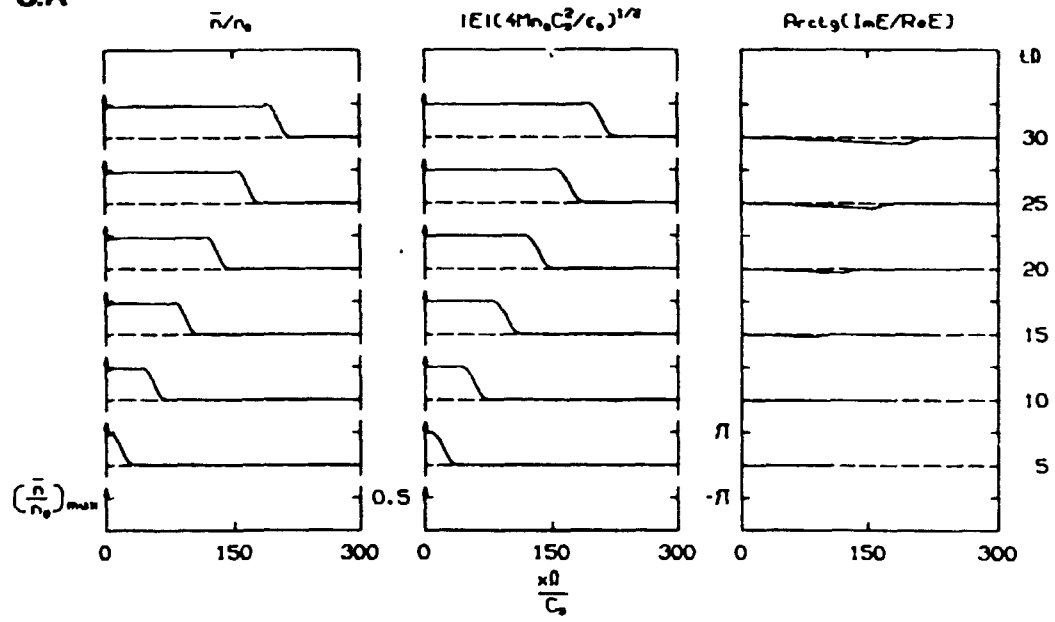
1.A



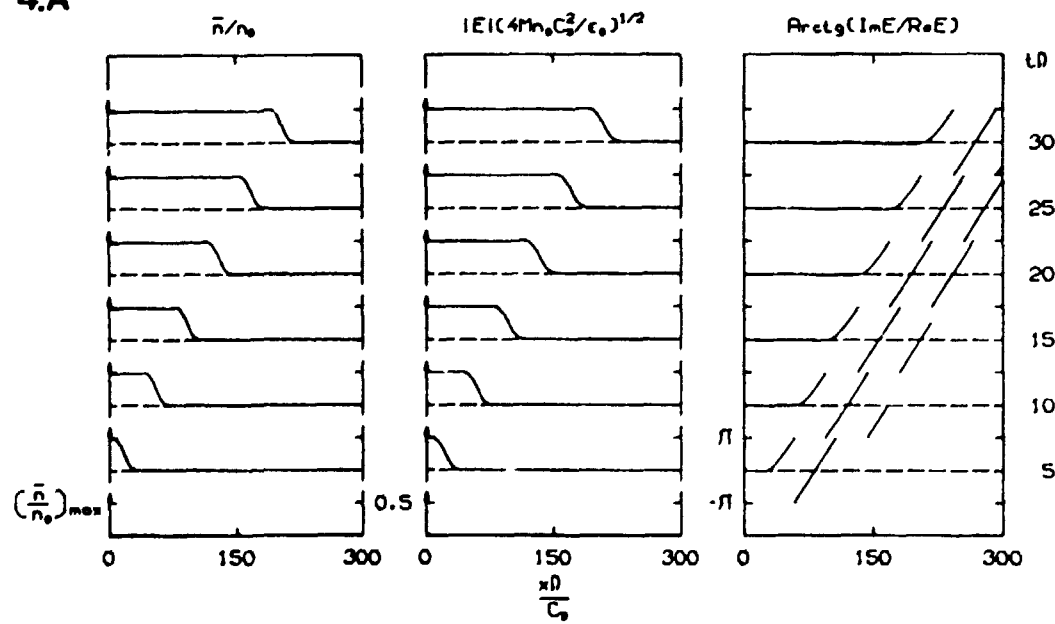
2.A



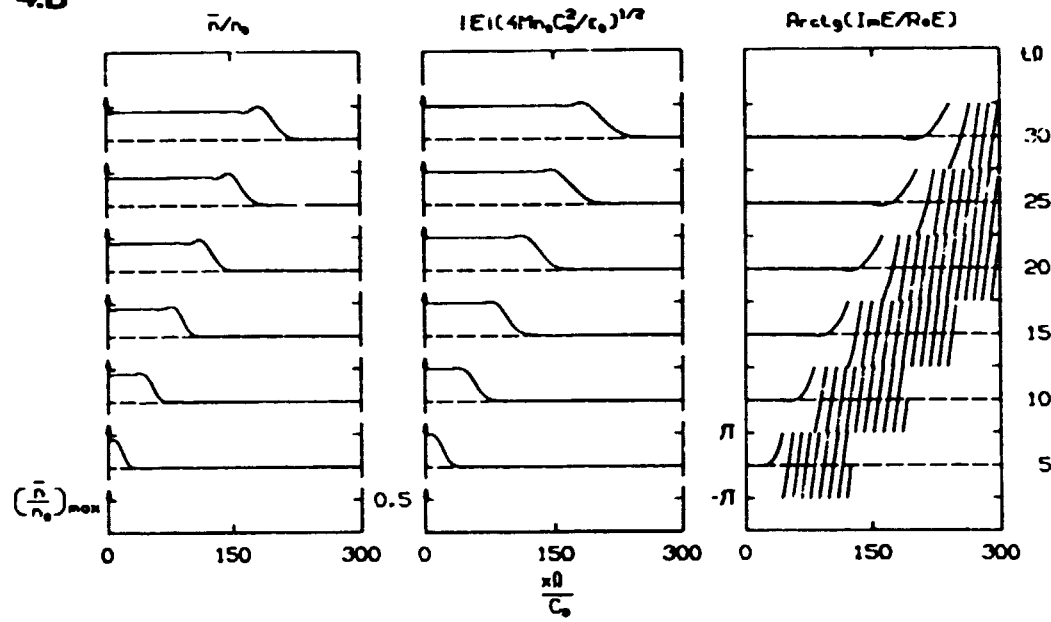
3.A



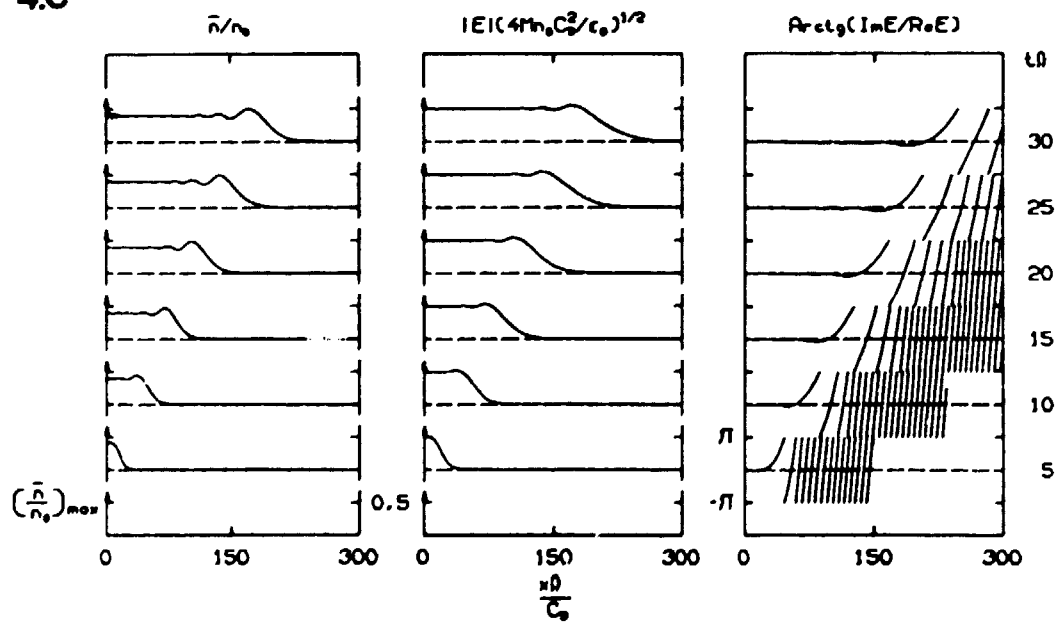
4.A



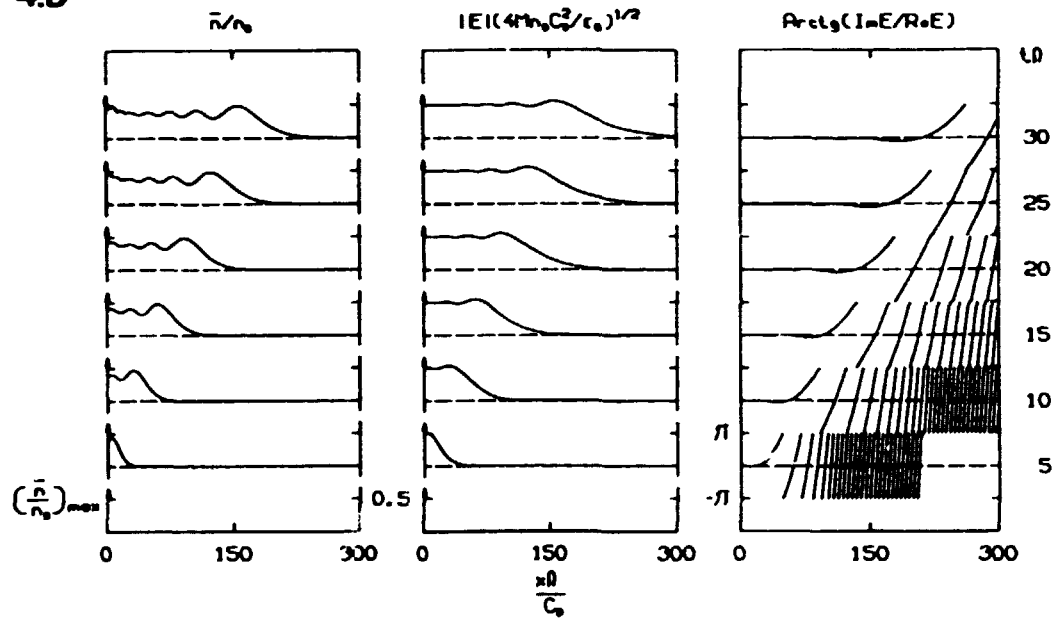
4.B



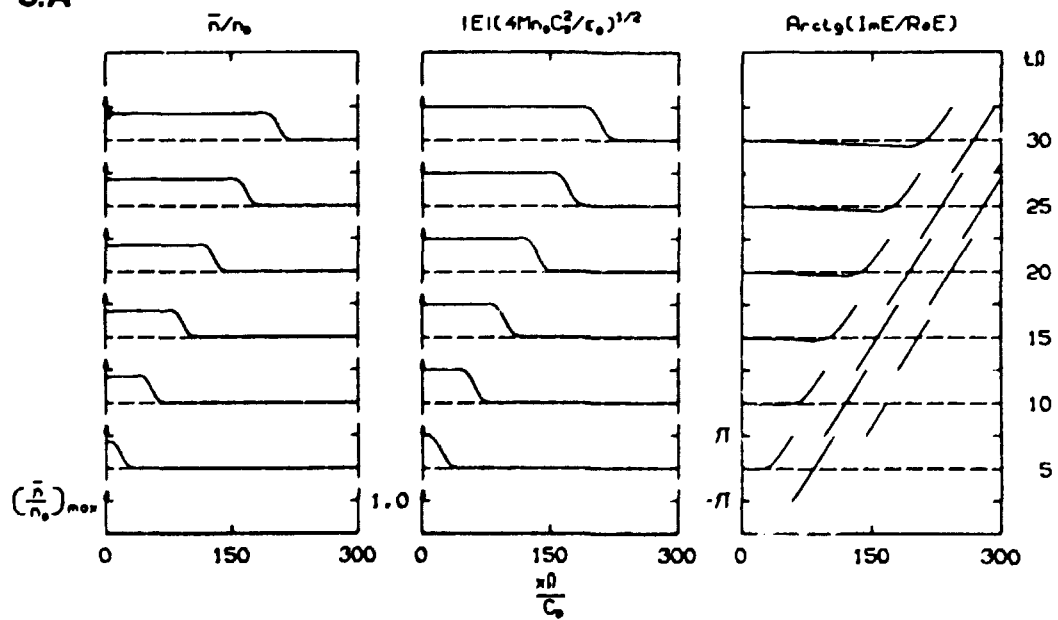
4.C



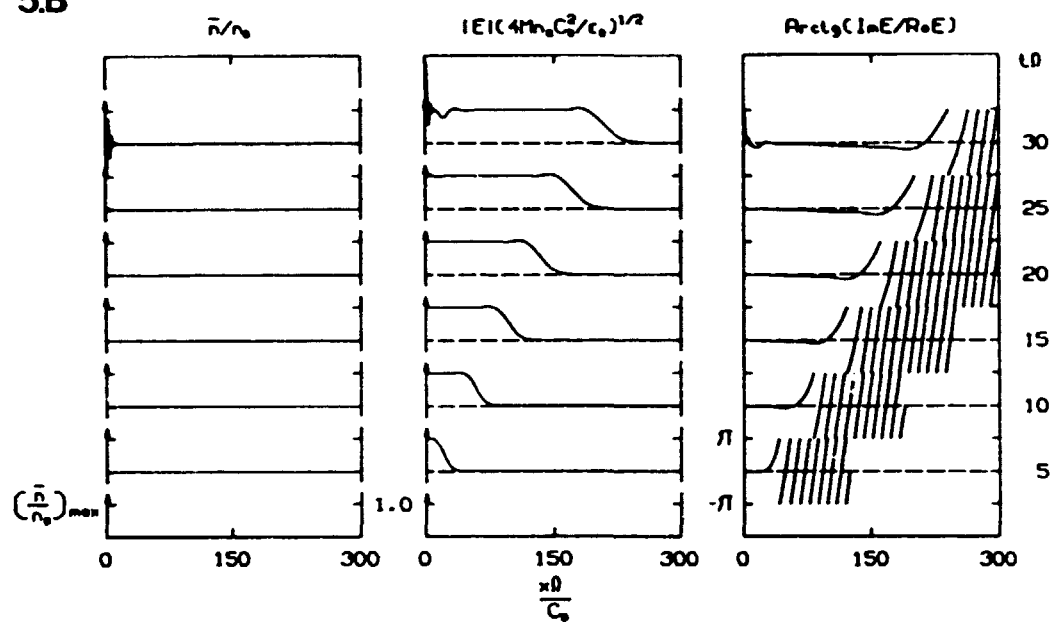
4.D



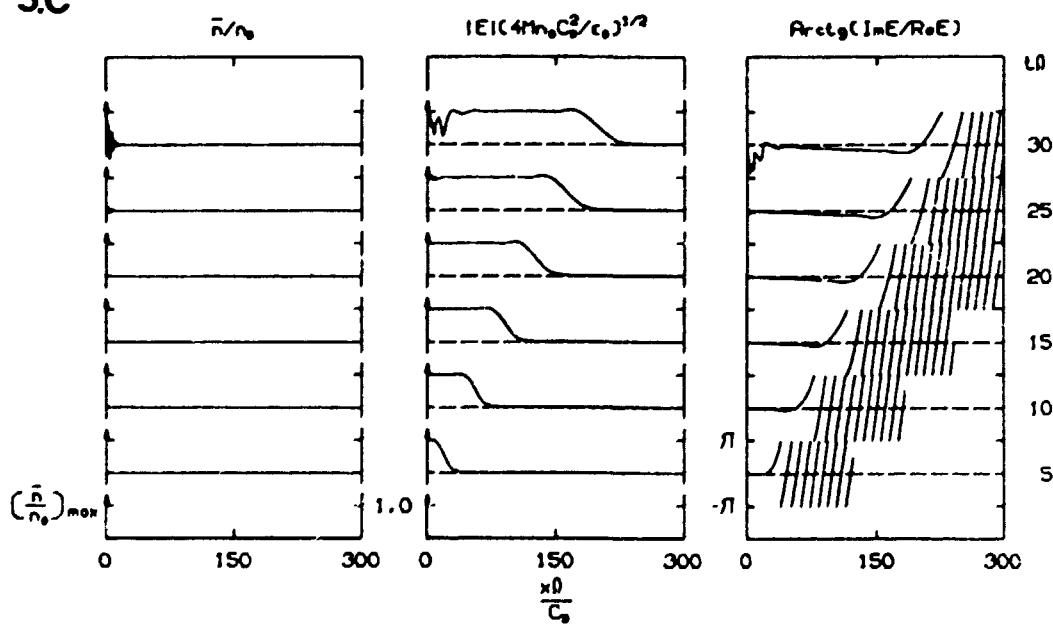
5.A



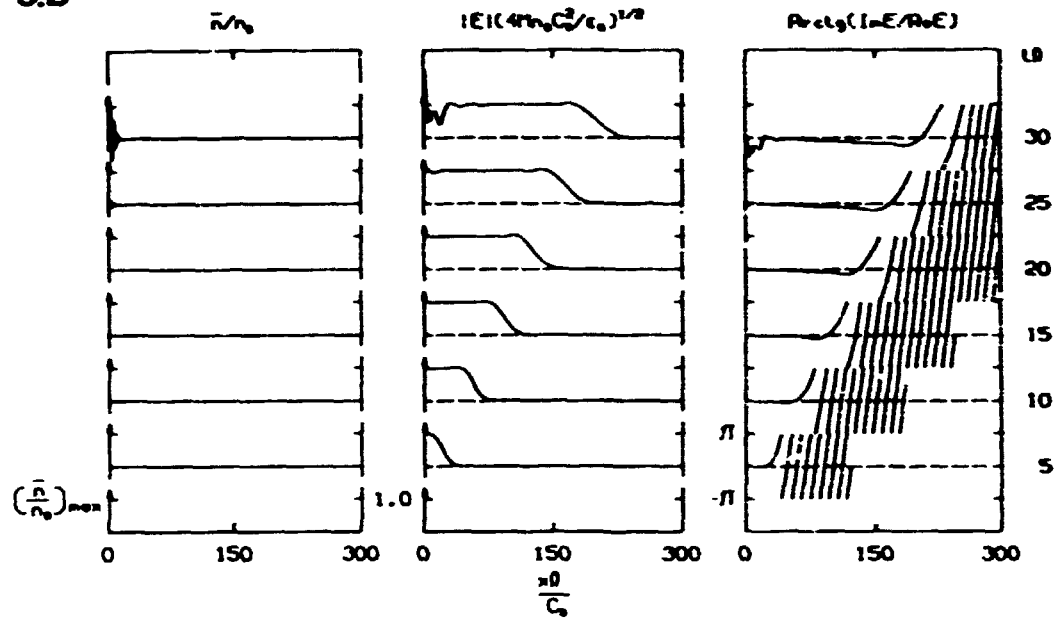
5.B



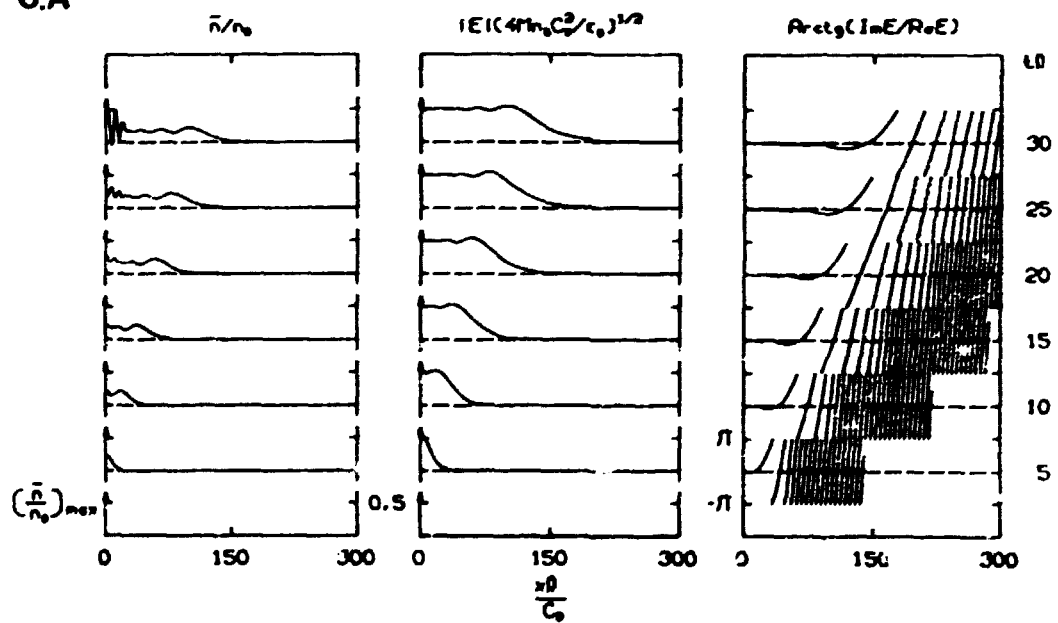
5.C



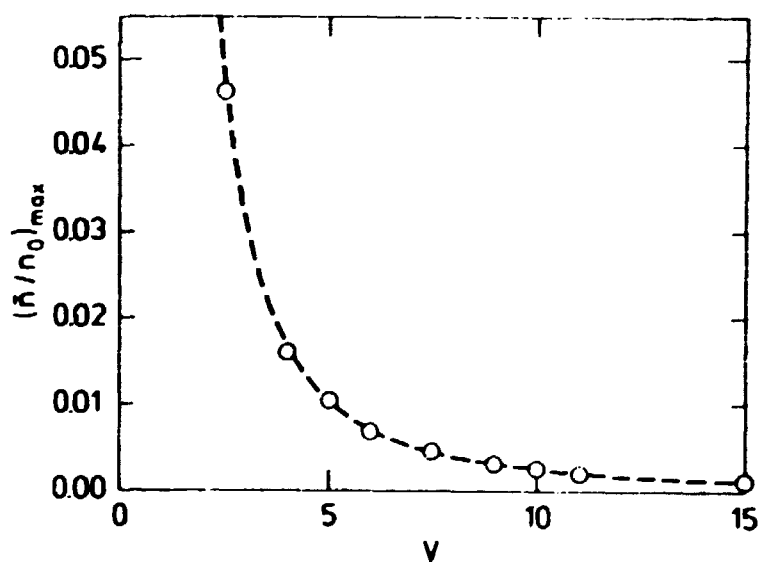
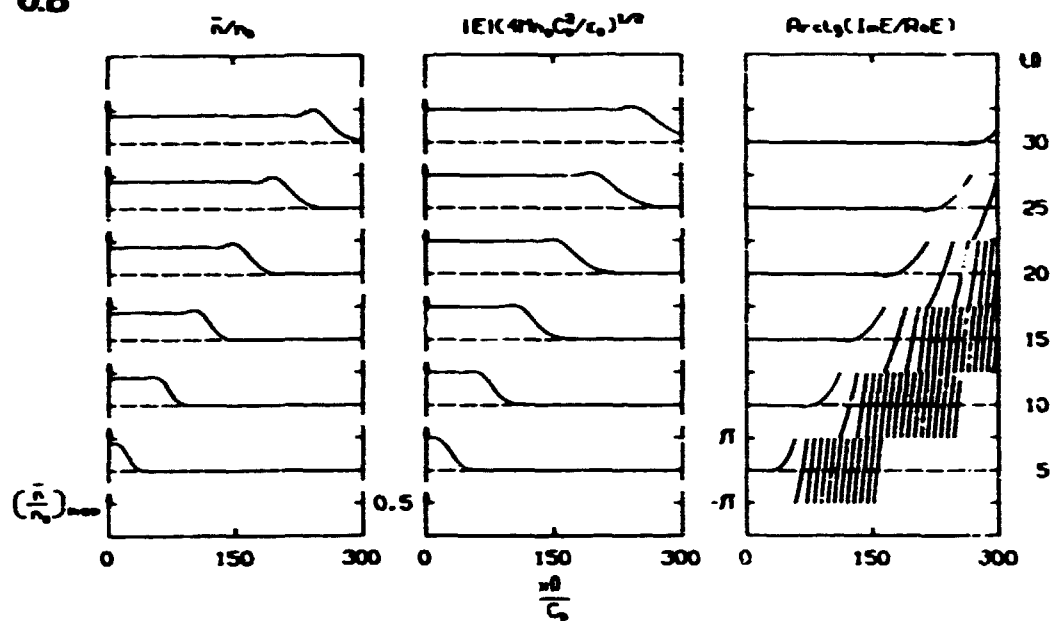
5.D



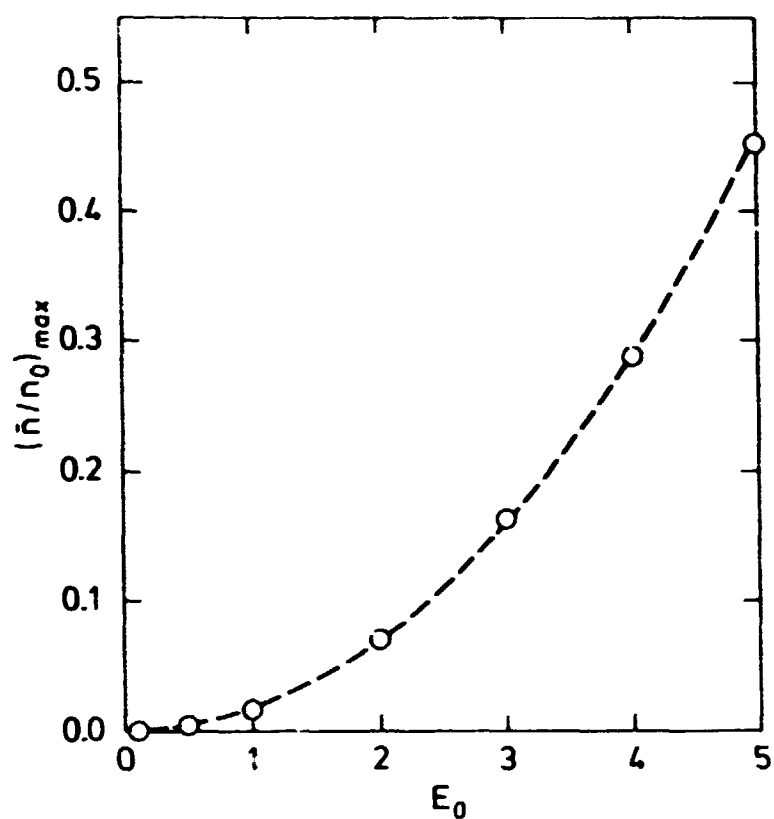
6.A



6.B



Figur G.2. Variationen af $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ mht. gruppehastigheden v for $Q = 0$, $E_0 = 0.5$, $v' = 0$ og $T_e = 4$. $\bar{n}/n_0 = 0.25/(v^2 - 1)$ er angivet med: - - -



Figur G.3. Variationen af $(\bar{n}/n_0)_{\max}$ mht. amplituden E_0 for $Q = 0$, $\nu = 7.5$, $\nu' = 0$, og $T_r = 4$. $\bar{n}/n_0 = E_0^2/55.3$ er angivet med:---.

2370

Rise - M -

Title and author(s) NONLINEAR TRANSIENT WAVE PROPAGATION IN HOMOGENEOUS PLASMAS (In Danish) Knud Thomsen	Date August 1984
	Department or group Physics Dept.
	Group's own registration number(s)
130 pages + tables + illustrations	Copies to
Abstract The transient phenomena associated with the propagation of nonlinear high frequency waves in homogeneous and isotropic or anisotropic plasma are considered. The basic equation for the different wave types included in this analysis are derived by using a two-fluid description of the plasma. Before discussing the importance of different nonlinearities the main results from a linear treatment are given. Generation of harmonic and local changes in the plasma frequency caused by ponderomotive forces are the nonlinear phenomena which are included in the nonlinear treatment. Generation of harmonics is only important for extraordinary waves and this case is discussed in detail. The density perturbations are described either as forced non-dispersive or as forced dispersive low frequency electrostatic waves. The differences between these two descriptions are first considered analytically then by a numerical analysis of the problem with the influence of the density variations on the propagation of the high frequency wave included. A one-dimensional description is used in all cases. Available on request from Rise Library, Rise National Laboratory (Rise Bibliotek), Forsøgsanlæg Rise), DK-4000 Roskilde, Denmark Telephone: (02) 37 12 12, ext. 2262. Telex: 43116	

**Rekvireres fra
Rise Bibliotek,
Forsegsanlæg Rise, postboks 49,
4000 Roskilde.
Telefon (02) 37 12 12, lokal 2262
Telex 43116**

**ISBN 87-550-0902-6
ISSN 0418-6435**